



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matúš Dzurilla

Edgeworthův rozvoj

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád by som poďakoval vedúcemu tejto práce Ing. Marek Omelka, Ph.D. za poskytnutý čas na všetkých konzultáciách. Nadalej by som rád poďakoval mojej rodine a kamarátom, ktorý ma v písaní práce podporovali.

Název práce: Edgeworthův rozvoj

Autor: Matúš Dzurilla

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá Edgeworthovým rozvojom pre aproximáciu rozdelenia odhadu parametra. Úloha práce je uviesť pojem Edgeworthov rozvoj, zaviesť jeho predpokaldy a s ním súvisiace termíny. Následne ukázať postup pre odvodenie prvého člena Edgeworthovho rovoju. Nakoniec túto aproximáciu demonštrovať na príkaldoch, porovnať ho s inými aproximáciami (hlavne celtnárnou limitnou vetou), a ukázať silné a slabé stránky Edgeworthovho rozvoja.

Klíčová slova: Edgeworthův rozvoj, charakteristická funkcia, centrálna limitná veta

Title: Edgeworth expansion

Author: Matúš Dzurilla

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Ing. Marek Omelka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis is focused around Edgeworths expansion for aproximation of distribution for parameter estimation. Aim of the thesis is to introduce term Edgeworths expansion, its assumptions and terminology asocieted with it. Afterwords demonstrate process of deducting first term of Edgeworths expansion. In the end demonstrate this deduction on examples and compare it with different approximations (mainly central limit theorem), and show strong and weak points of Edgeworths expansion.

Keywords: Edgeworth expansion, characteristic function, central limit theorem

Obsah

Úvod	3
1 Úvod do Edgeworthsovho rozvoju	4
1.1 Motivačný príklad	4
1.2 Odvodenie Edgeworthsovej aproximácie	4
1.2.1 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n	4
1.2.2 Taylorov rozvoj logaritmu charakteristickej funkcie S_n . . .	5
1.2.3 Vyjadrenie kumulantov pomocou momentov	6
1.2.4 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n ako násobok cha- rakteristickej funkcie $N(0,1)$ a polynómu	8
1.2.5 Prepis členov polynómu za pomoci hustoty $N(0,1)$ a jej de- rivácií	12
1.2.6 Finálne vyjadrenie distribúcie pôvodného rozdelenia	14
1.2.7 Aproximácia vyjadrenia distribúcie pôvodného rozdelenia .	14
1.3 Príklad na exponenciálnom rozdelení	15
1.3.1 Normálna aproximácia	15
1.3.2 Edgeworthsov rozvoj s jedným a dvoma členmi	16
1.3.3 Presné rozdelenie	16
1.3.4 Grafické porovnanie	17
1.3.5 Problémy Edgeworthsovej aproximácie	19
2 Zobecnenie Edgeworthsovho rozvoja	21
2.1 Edgeworthsov rozvoj pre hladkú transformáciu súčtu náhodných veličín	21
2.1.1 Hladká transformácia	21
2.1.2 Príklad hladkých transformácií	21
2.1.3 Edgeworthsov rozvoj pre hladkú transformáciu	22
2.1.4 Rozvoj hladkej transformácie za pomoci Taylorovho rozvoja	23
2.1.5 Odvodenie charakteristickej funkcie pre $S_{n,2}$	24
2.1.6 Vyjadrenie p_1 Edgeworthsovho rozvoja	26
2.1.7 Finálny vzorec pre výpočet p_1 Edgeworthsovho rozvoja . .	28
2.2 Cornish-Fisherov rozvoj	28
2.2.1 Zavedenie rozvoja	29
2.2.2 Odvodenie Cornish-Fisherovho rozvoja z Edgeworthsovho rozvoja	29
2.2.3 Odvodenie p_{11} a p_{21}	29
2.2.4 Vzorce pre p_{12} a p_{22} Cornish-Fisherovho rozvoja	31
3 Príklady Edgeworthsovho rozvoja	33
3.1 Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového rozptylu nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia. . . .	33
3.1.1 Zavedenie odhadu	33
3.1.2 Výpočet a_i a $a_{i,j}$	34
3.1.3 Výpočet μ_{i_1,i_2} a μ_{i_1,i_2,i_3}	37
3.1.4 Výpočet p_1	38

3.1.5	Vyjadrenie Edgeworthsovho rozvoja	38
3.1.6	Cornish-Fisherov rozvoj	39
3.1.7	Porovnanie s Monte Carlom	39
3.1.8	Porovnanie kvantilov	42
3.2	Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového priemeru. .	43
3.2.1	Zavedenie pojmu t -štatistika	43
3.2.2	Edgeworthsov rozvoj pre štandardizovaný výberový priemer nezávislých rovnako rozdelených veličín	43
3.2.3	Predpoklady pre Edgeworthsov rozvoj	44
3.2.4	Výpočet prvého člena Edgeworthsovho rozvoja	44
3.2.5	Výpočet a_{i_1} a a_{i_1, i_2}	45
3.2.6	Výpočet μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1, i_2, i_3}	45
3.2.7	Vyjadrenie p_1 a Edgeworthsova aproximácia	46
3.2.8	Aproximácia kvantilov výberového priemeru založená na Cornish-Fisherovej aproximácii	47
Záver		48
4 Apendix		49
4.1	Charakteristická funkcia a jej vlastnosti	49
4.2	Definícia $\mathbf{O}_p, \mathbf{o}_p$	50
4.3	Delta veta	50
4.4	Centrálna limitná veta	50
Seznam použité literatury		51
Seznam obrázků		52
Seznam tabulek		53
Prílohy		54

Úvod

V tejto práci budeme vychádzať z literatúry od Hall, P., ktorá sa zaoberá Edgeworthovým rozvojom, bootstrapom a ich aplikáciami. V tejto práci sa zaoberáme samotným pojmom Edgeworthsov rozvoj, a jeho odvodením. Cieľom je názorne ukázať odvodenie Edgeworthsovho rozvoju, jeho predpoklady a ukázať jeho použitie na príkladoch s porovnaním s aproximáciou pomocou centrálnej limitnej vety.

Prístup bol založený na ukázaní Edgeworthsovho rozvoja pre štandardizovaný súčet nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín a ukážkou tohto rozvoja na príklade. A následne odvodením obcejšej verzie s ukážkou na dvoch príkladoch. Jeden príklad pre odvodenie aproximácie štandardizovaného výberového rozptylu exponenciálneho rozdelenia. A druhý na odvodenie aproximácie t -štatistiky za pomoci Edgeworthsovho rozdelenia.

Táto práca sa pozostáva z 4 kapitol:

V prvej kapitole "Úvod do Edgeworthsovho rozvoja", ukážeme odvodenie tohto rozvoja na štandardizovanom súčte nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, uvedieme jeho prvé 2 členy, a následne demonštrujeme na rozdelení štandardizovaného súčtu nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia.

V druhej kapitole "Zobecnenie Edgeworthsovho rozvoja", využijeme závery z kapitoly jedna, a ukážeme zobecnenie Edgeworthsovho rozvoja na rozdelení "hladkej transformácie" nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, a odvodíme prvý člen obecného Edgeworthsovho rozvoja.

Následne zavedieme Cornish-Fisherov rozvoj, ktorý na základe Edgeworthsovho rozvoja aproximuje kvantily rozdelenia.

V tretej kapitole demonštrujeme obcejšiu verziu Edgeworthsovho rozvoja pre rozdelenie štandardizovaného výberového rozptylu náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia, a určenie jeho kvantilov.

Následne odvodíme Edgeworthsov rozvoj pre t -štatistiku aj s odhadom kvantilov pomocou Cornish-Fisherovho rozvoja.

V štvrtej kapitole "Apendix", sú vymenované niektoré netriviálne tvrdenia, ktoré počas odvodenia používame.

1. Úvod do Edgeworthsovho rozvoju

V tejto časti naznačíme odvodenie Edgeworthsovho rozvoju na súčte nezávislých rovnako rozdelených veličín.

1.1 Motivačný príklad

Nech máme X_1, X_2, X_3, \dots nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny so strednou hodnotou $\theta_0 = \mu$ a známym rozptylom σ^2 . Potom odhadom θ_0 je výberový priemer

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

s rozptylom σ^2/n . Z centrálnej limitnej vety plynie, že náhodná veličina $S_n = \sqrt{n} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta_0)}{\sigma}$ je asymptoticky normálne rozdelená s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom. Potom interval spoľahlivosti založený na centrálnej limitnej vete je interval $I = (\hat{\theta} - n^{-\frac{1}{2}} \sigma u_{1-\alpha/2}, \hat{\theta} + n^{-\frac{1}{2}} \sigma u_{1-\alpha/2})$, kde pre u_α platí $P(N < u_\alpha) = \alpha$, kde N pochádza z štandardného normálneho rozdelenia. Zaujímá nás kvalita aproximácie centrálnou limitnou vetou, keďže je ňou určená presnosť pokrytia intervalu spoľahlivosti.

1.2 Odvodenie Edgeworthsovej aproximácie

V tejto kapitole sa budeme venovať odvodeniu Edgeworthsovho rozvoju. Edgeworthsov rozvoj je v tvare polynómov násobených s deriváciami distribučnej funkcie normálneho rozdelenia.

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-(j/2)} p_j(x)\phi(x) + \dots,$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia, $\phi(x)$ je jeho hustota a $p_i(x)$ sú polynómy.

Preto budeme porovnávať rozdelenie náhodnej veličiny S_n s normálnym rozdelením, rovnako tak budem porovnávať charakteristickú funkciu S_n a upravovať ju do tvaru podobného charakteristickej funkcii normálneho rozdelenia. (Pre definíciu charakteristickej funkcie viz. Apendix definícia 3)

V tejto kapitole ukážeme náznak odvodenia rozvoja.

1.2.1 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n

Jeden zo spôsobov ako skúmať kvalitu normálnej aproximácie je pomocou charakteristických funkcií. Keďže S_n je asymptoticky normálne ($N(0,1)$), tak charak-

teristická funkcia ψ_n veličiny S_n konverguje k charakteristickej funkcii normálneho rozdelenia, pre $n \rightarrow \infty$ (váz. Apendix veta 5).

$$\psi_n(t) = \mathbb{E}(\exp(itS_n)) \rightarrow \mathbb{E}(\exp(itN)) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \text{ pre } t \in \mathbb{R}.$$

Pre charakteristickú funkciu $\psi_n(t)$ platí:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \mathbb{E}(\exp(itS_n)) = \mathbb{E}\left(\exp\left(itn^{\frac{1}{2}}\frac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{\sigma}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(itn^{\frac{1}{2}}\frac{(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - \theta_0)}{\sigma}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i\frac{t}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - \theta_0)}{\sigma}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n \exp\left(i\frac{t}{n^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{(X_j - \theta_0)}{\sigma}\right)\right)\right) \\ &\stackrel{\text{nezávislosť } X_j}{=} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\exp\left(i\frac{t}{n^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{(X_j - \theta_0)}{\sigma}\right)\right)\right) \\ &\stackrel{\text{identita } X_j}{=} \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(i\frac{t}{n^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{(X_1 - \theta_0)}{\sigma}\right)\right)\right)\right)^n = (\psi(t/n^{1/2}))^n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde ψ je charakteristická funkcia $Y = (X_1 - \theta_0)/\sigma$. V rovníc (1.1) v poslednom kroku je identita X_j myslená v zmysle, že X_j sú rovnako rozdelené a teda v rámci výpočtu strednej hodnoty je možné tieto náhodné veličiny zameniť za X_1 . (Pre definíciu strednej hodnoty z komplexnej náhodnej veličiny váz. Apendix definícia 2.)

1.2.2 Taylorov rozvoj logaritmu charakteristickej funkcie S_n

Na začiatok si zavedieme, čo sú to kumulanty. Budú potrebné pri odvodení rozvoja charakteristickej funkcie. Kumulanty sa definujú pomocou momentovej vytvárajúcej funkcie. Pre pripomenutie momentová vytvárajúca funkcia $M_X(t)$ náhodnej veličiny X je v tvare:

$$M_X(t) = \mathbb{E} e^{tX},$$

pre nejaké $t \in \mathbb{R}$.

Definice 1 (DasGupta, 2008, str. 194 - 195). *Nech X je náhodná veličina, pre ktorú existuje konečná momentová vytvárajúca funkcia $M_X(t)$, pre t z nejakého okolia nuly. A nech $K_X(t) = \log M_X(t)$. Potom r -ty kumulant X je definovaný ako*

$$\kappa_r = \frac{d^r}{dt^r} K_X(t)|_{t=0}.$$

Ekvivalentne, kumulanty X sú koeficientami v rozvoji $K_X(t)$ do mocniny rady

$$K_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{t^n}{n!}, \tag{1.2}$$

pre t z polomeru konvergenzie $K_X(t)$.

Rovnosť (1.2) platí zo súčtových vzorcov pre mocniny rady (Jarník, 1984, str. 527 - 528) s koeficientom z polomeru konvergenencie. Z definície 1 môžeme vidieť, že kumulanty existujú len ak existuje momentová vytvárajúca funkcia, ktorá je konečná na nejakom okolí nuly.

Rozviňme logaritmus charakteristickej funkcie ψ_Y , náhodnej veličiny Y , $Y = (X_1 - \theta_0)/\sigma$, do mocniny rady pomocou Taylorovho rozvoju $\log(\psi_Y(t))$ v bode $t = 0$.

Na začiatok si označme $\log(\psi_Y(t))$ ako $\zeta_Y(t)$, potom:

$$\zeta_Y(t) = \zeta_Y(0) + \frac{d}{dt}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0} t + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0} t^n + \dots$$

Keďže $\psi_Y(0) = 1$ a $\log(1) = 0$ môžeme vidieť že prvý člen z postupnosti vypadne. Potom naďalej sa budeme venovať členu $\frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0}$.

$$\frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t)) = \frac{d^n}{dt^n}(\log[\mathbf{E}(e^{itY})]) = \frac{d^n}{dt^n}(\log[M_Y(it)]) = \frac{d^n}{dt^n}(K_Y(it)).$$

Potom z definície 1 a zo vzťahu $\frac{d^n}{dx^n}f(cx) = c^n \frac{d^n}{dx^n}f(x)$, kde f je dostatočne hladká funkcia a c je konštanta, platí:

$$\frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0} = i^n \frac{d^n}{dt^n}K_X(t)\Big|_{t=0} = i^n \kappa_n.$$

Potom za nech pre logaritmus charakteristickej funkcie náhodnej veličiny Y , platí:

$$\log(\psi_Y(t)) = (\zeta_Y(t)) = \kappa_1 it + \frac{1}{2}\kappa_2 (it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j (it)^j + \dots$$

Z tohto rozvoju môžeme potom vyjadriť i charakteristickú funkciu $\psi_Y(t)$ pomocou:

$$\psi_Y(t) = \exp(\log(\psi_Y(t))) = \exp\left(\kappa_1 it + \frac{1}{2}\kappa_2 (it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j (it)^j + \dots\right). \quad (1.3)$$

Mohli by sme vyjadriť charakteristickú funkciu S_n priamo ako mocninu radu, ako je ukázané v Apendix veta 3 a 4. Ale to by sme potom nevedeli porovnať s charakteristickou funkciou normálneho rozdelenia, ktorá je v exponenciálnom tvare a preto teda vyjadrujeme charakteristickú funkciu pomocou exponenciály z logaritmu charakteristickej funkcie S_n .

1.2.3 Vyjadrenie kumulantov pomocou momentov

Naďalej podľa Apendix veta 4 a za existencie všetkých momentov vieme, že:

$$\psi_Y(t) = 1 + it \mathbf{E}[Y] + \frac{1}{2}(it)^2 \mathbf{E}[Y^2] + \dots + \frac{1}{j!}(it)^j \mathbf{E}[Y^j] + \dots, \quad (1.4)$$

A teda môžeme porovnať členy v rovnosti (1.3) a (1.4). Toto vyjadrenie naďalej budeme upravovať:

$$\exp(\kappa_1 it + \frac{1}{2}\kappa_2(it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \dots) = 1 + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!}(it)^j \mathbb{E}[Y^j],$$

a teda:

$$\kappa_1 it + \frac{1}{2}\kappa_2(it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \dots = \log\left(1 + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!}(it)^j \mathbb{E}[Y^j]\right).$$

Kde môžeme polynomicke rozvinúť funkciu $\log(x+1)$ v bode 0 a dostávame:

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

pre $x \in (-1,1)$, potom:

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!}(it)^j \mathbb{E}[Y^j] \right)^k, \quad (1.5)$$

teraz môžeme členy κ_j vyjadriť z (1.5) metódou porovnávania členov pri $(it)^j$.

Ukážka pre prvé štyri členy:

Prvé štyri členy budú členy (1.5) pri koeficientoch $(it)^j$ pre $j \in \{1,2,3,4\}$ a tie budú obsiahnuté pre koeficienty súm $k \leq 4$ a $j \leq 4$.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^4 \frac{1}{j!}(it)^j \mathbb{E}[Y^j] \right)^k = \\ & (-1)^2 \frac{1}{1} \left(\frac{1}{1}(it)^1 \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}(it)^2 \mathbb{E}[Y^2] + \frac{1}{6}(it)^3 \mathbb{E}[Y^3] + \frac{1}{24}(it)^4 \mathbb{E}[Y^4] \right) \\ & + (-1)^3 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1}(it)^1 \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}(it)^2 \mathbb{E}[Y^2] + \frac{1}{6}(it)^3 \mathbb{E}[Y^3] + \frac{1}{24}(it)^4 \mathbb{E}[Y^4] \right)^2 \\ & + (-1)^4 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1}(it)^1 \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}(it)^2 \mathbb{E}[Y^2] + \frac{1}{6}(it)^3 \mathbb{E}[Y^3] + \frac{1}{24}(it)^4 \mathbb{E}[Y^4] \right)^3 \\ & + (-1)^4 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1}(it)^1 \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}(it)^2 \mathbb{E}[Y^2] + \frac{1}{6}(it)^3 \mathbb{E}[Y^3] + \frac{1}{24}(it)^4 \mathbb{E}[Y^4] \right)^4. \end{aligned}$$

Pozrieme sa na jednotlivé riadky samostatne (budú nás zaujímať len čísla pri $(it)^j$ pre $j \in \{1,2,3,4\}$):

Prvý je jednoduchý:

$$(it) \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}(it)^2 \mathbb{E}[Y^2] + \frac{1}{6}(it)^3 \mathbb{E}[Y^3] + \frac{1}{24}(it)^4 \mathbb{E}[Y^4].$$

Druhý:

$$-\frac{1}{2}(it)^2 (\mathbb{E}[Y])^2 - \frac{1}{2}(it)^3 \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[Y^2] - \frac{1}{8}(it)^4 (\mathbb{E}[Y^2])^2 - \frac{1}{6}(it)^4 \mathbb{E}[Y] \mathbb{E}[Y^3] + \dots$$

Tretí:

$$\frac{1}{3}(it)^3 (\mathbb{E}[Y])^3 + \frac{1}{2}(it)^4 (\mathbb{E}[Y])^2 \mathbb{E}[Y^2] + \dots$$

Štvrtý:

$$\frac{1}{4}(it)^4(E[Y])^4 + \dots$$

Z riadkov vyššie môžeme vidieť, že:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= E[Y] \\ \kappa_2 &= E[Y] - (E[Y])^2 = \text{var}(Y) \\ \kappa_3 &= E[Y^3] - 3E[Y^2]E[Y] + 2(E[Y])^3 = E[Y - (E[Y])]^3 \\ \kappa_4 &= E[Y^4] - 3(E[Y^2])^2 - 4E[Y]E[Y^3] + 12E[Y^2](E[Y])^2 + 6(E[Y])^4 \\ &= E[Y - E[Y]]^4 - 3(\text{var}(Y))^2.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Poznámka: κ_j je polynóm v momentoch stupňa j . Rovnako môžu aj momenty byť vyjadrené ako polynómy koeficientov κ_j , kde polynóm pre $E(Y^j)$ je polynóm stupňa j .

1.2.4 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n ako násobok charakteristickej funkcie $N(0,1)$ a polynómu

Vráťme sa k tomu, že $Y = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$, kde platí, že μ je stredná hodnota X_1 a σ^2 je rozptyl X_1 . Potom platí, že stredná hodnota Y je rovná 0 a rozptyl je jedna. Z čoho vyplýva $\kappa_1 = 0$ a $\kappa_2 = 1$. Takže keď prepíšeme rovnosť (1.3) dostaneme, že:

$$\psi(t) = \exp\left(\frac{1}{2}(it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \dots\right),$$

Čo už môžeme použiť na vyjadrenie ψ_n charakteristickej funkcie náhodnej veličiny $S_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n Y_j$ a z jej vlastností (1.1) vyplýva:

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \left(\psi(t/n^{1/2})\right)^n = \exp\left(n\left(\frac{1}{2}(n^{-1/2}it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j(n^{-1/2}it)^j + \dots\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(it)^2 + n^{-1/2} \frac{1}{3!}\kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \dots\right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left(n^{-1/2} \frac{1}{3!}\kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \dots\right),\end{aligned}\tag{1.7}$$

kde $e^{-\frac{t^2}{2}}$ je charakteristická funkcia $N(0,1)$.

Druhý člen s exponenciálou vo vyjadrení funkcie funkcie $\psi_n(t)$ v (1.7) môžeme naďalej rozviesť do mocniny rady:

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left(n^{-1/2} \frac{1}{3!}\kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \dots\right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + n^{-1/2} r_1(it) + n^{-1} r_2(it) + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) + \dots\right),\end{aligned}\tag{1.8}$$

kde $r_j(x)$ je polynóm s reálnymi koeficientami stupňa $3j$, ako bude ukázané v nasledujúcom výpočte pre r_1 a r_2 . Naďalej tento polynóm závisí na $\kappa_3, \dots, \kappa_{j+2}$, ale už nie na n . Z rozvoja (1.8) môžeme vidieť, ako sa líši charakteristická funkcia rozdelenia S_n od charakteristickej funkcie normálneho rozdelenia.

Pokiaľ sa bližšie pozrieme na polynómy r_j , tak môžeme vidieť, že r_j je párneho stupňa keď j je párne a nepárneho stupňa, keď j je nepárne. Ukážka výpočtu prvých dvoch členov:

Naďalej si označme výraz

$$\varphi(it) = \exp \left(n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3 (it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j + \dots \right), \quad (1.9)$$

nech $z = it$ a urobme Taylorov rozvoj toho výrazu pre $z = 0$.

$$\begin{aligned} & \varphi(0) + \varphi^{(1)}(0) z + \frac{1}{2} \varphi^{(2)}(0) z^2 + \frac{1}{6} \varphi^{(3)}(0) z^3 \\ & + \frac{1}{24} \varphi^{(4)}(0) z^4 + \frac{1}{120} \varphi^{(5)}(0) z^5 + \frac{1}{720} \varphi^{(6)}(0) z^6 + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Teraz vieme, že $z = it$ a pokiaľ $z = 0$ tak $t = 0$ takže, môžeme vidieť z (1.10) a (1.9), že členy $\varphi^{(j)}(0)$ budú obsahovať funkciu $\varphi(0)$ a nejaké derivácie člena

$$n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3 z^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j z^j + \dots,$$

v bode $z = 0$, tento člen si označíme ako $W(z)$.

Funkcia $W(z)$ je polynóm, ktorého derivácie sú ľahko vyjadriteľné v tvare:

$$W^{(l)}(z) = \left(n^{-(l-2)/2} \kappa_l + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{(j-l)!} \kappa_j z^{j-l} + \dots \right),$$

pre $l > 2$ celočíselne. Pre $l = 1$ a $l = 2$ bude vyjadrenie v nasledujúcich výpočtoch.

Derivácie člena $n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3 z^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j (z)^j + \dots$ v bode $z = 0$:

$$\begin{aligned} W(z)|_{z=0} &= 0, \\ W^{(1)}(z)|_{z=0} &= 0, \\ W^{(2)}(z)|_{z=0} &= 0, \\ W^{(l)}(z)|_{z=0} &= n^{-(l-2)/2} \kappa_l. \end{aligned}$$

Momentálne, keď vieme aké hodnoty nadobúdajú polynómy $W(z)$ a jeho derivácie, tak budeme potrebovať ešte vedieť hodnotu samotnej funkcie $\varphi(z)$ v bode $z = 0$. Keďže $\varphi(z) = \exp(W(z))$ tak $\varphi(z)|_{z=0} = \exp(0) = 1$. Teraz keď vieme

všetky hodnoty funkcie a jej derivácii tak môžeme vypočítať jednotlivé derivácie $\varphi(z)$ pre $z = 0$. Prvá derivácia a dosadenie:

$$\varphi^{(1)}(z)|_{z=0} = \left(\varphi(z) \left(W^{(1)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} = 1 * 0 = 0.$$

Druhá derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(2)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= 0 * 0 + 1 * 0 = 0. \end{aligned}$$

Tretia derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 2\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= 0 * 0 + 2 * 0 * 0 + 1 * n^{-1/2} \kappa_3 = n^{-1/2} \kappa_3. \end{aligned}$$

Štvrtá derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(3)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 3\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + 3\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(z) \left(W^{(4)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= n^{-1/2} \kappa_3 * 0 + 3 * 0 * 0 + 3 * 0 * n^{-1/2} \kappa_3 + 1 * n^{-1} \kappa_4 \\ &= n^{-1} \kappa_4. \end{aligned}$$

Piata derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(5)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(4)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 4\varphi^{(3)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + 6\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(4)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(5)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} = n^{-1} \kappa_4 * 0 \\ &\quad + 4 * n^{-1/2} \kappa_3 * 0 + 6 * 0 * n^{-1/2} \kappa_3 + 4 * 0 * n^{-1} \kappa_4 + 1 * n^{-3/2} \kappa_5 \\ &= n^{-3/2} \kappa_5. \end{aligned}$$

Šiesta derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(6)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(5)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 5\varphi^{(4)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + 10\varphi^{(3)}(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + 10\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(4)}(z) \right) + 5\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(5)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(6)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= n^{-3/2} \kappa_5 * 0 + 5 * n^{-1} \kappa_4 * 0 + 10 * n^{-1/2} \kappa_3 * n^{-1/2} \kappa_3 \\ &\quad + 10 * 0 * n^{-1} \kappa_4 + 5 * 0 * n^{-3/2} \kappa_5 + 1 * n^{-2} \kappa_6 \\ &= n^{-2} \kappa_6 + 10n^{-1} \kappa_3^2. \end{aligned}$$

Po dosadení do (1.10) dostávame:

$$1 + \frac{1}{6}n^{-1/2}\kappa_3(z)^3 + \frac{1}{24}n^{-1}\kappa_4(z)^4 + \frac{1}{120}n^{-3/2}\kappa_5(z)^5 + \frac{1}{720}(n^{-2}\kappa_6 + 10n^{-1}\kappa_3^2)(z)^6 + \dots$$

Teraz pre vyjadrenie r_1 sa pozrieme na členy pri $n^{-1/2}$:

$$r_1(z) = \frac{1}{6}\kappa_3 z^3,$$

Pre vyjadrenie r_2 sa pozrieme na členy pri n^{-1} :

$$r_2(z) = \frac{1}{24}\kappa_4 z^4 + \frac{1}{72}\kappa_3^2 z^6.$$

Následne prepíšeme funkciu ψ_n z 1.8 do nasledujúceho tvaru:

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1/2} r_1(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1} r_2(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots,$$

A keďže platí, že:

$$\psi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP(S_n \leq x).$$

Ďalej vieme, že platí:

$$e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x), \quad (1.11)$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia $N(0,1)$ rozdelenia.

Nech $R_j(x)$ je funkcia, ktorej Fourier-Stieltjesova transformácia je rovná $r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dR_j(x) = r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Potom to znamená, že pokiaľ by sme si zobrali náhodnú veličinu Z s distribučnou funkciou v tvare:

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-(j/2)} R_j(x) + \dots$$

Potom pre $\psi_Z(t) = E[\exp(itZ)]$ platí:

$$\begin{aligned} E[\exp(itZ)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(F_Z(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(\Phi(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-(j/2)} R_j(x) + \dots) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(\Phi(x)) + n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(R_1(x)) + \dots \\ &\quad + n^{-(j/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(R_j(x)) + \dots, \end{aligned}$$

z čoho plynie, že:

$$\psi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1/2} r_1(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1} r_2(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots,$$

čo je presne charakteristická funkcia S_n a teda:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-(j/2)} R_j(x) + \dots, \quad (1.12)$$

V ďalšej časti ukážeme ako vyjadriť R_j za pomoci hustoty $N(0,1)$.

1.2.5 Prepis členov polynómu za pomoci hustoty $N(0,1)$ a jej derivácií

Pokiaľ by sme integrovali v (1.11) per-partes, nech

$$\begin{aligned} v &= 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2), & u' &= \exp(itx), \\ v' &= -x/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2), & u &= (it)^{-1} \exp(itx). \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x) &= \left[\frac{1}{it\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \exp(itx) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x}{it\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \exp(itx) dx. \end{aligned}$$

Vieme, že $\frac{1}{it\sqrt{2\pi}}$ je konštanta a $\exp(itx)$ je obmedzené, navyše platí, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x^2/2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x^2/2) = 0,$$

a teda prvý člen vypadne. A naďalej môžeme upraviť 2. člen:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x}{it\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \exp(itx) dx \\ &= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\ &= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(\Phi^{(1)}(x)) \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že sa charakteristická funkcia normálneho rozdelenia dá vyjadriť nasledujúco:

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x) \\ &= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(1)}(x) \\ &= (-it)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(2)}(x) \\ &\vdots \\ &= (-it)^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(j)}(x), \end{aligned}$$

kde $\Phi^{(j)}(x) = \frac{d^j \Phi}{dx^j}$. Takže to znamená, že:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\{(-D)^j \Phi(x)\} = (it)^j e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1.13)$$

kde D je diferenciálny operátor $\frac{d}{dx}$. Potom môžeme interpretovať $r_j(-D)$ ako polynóm diferenciálnych operátorov, takže $r_j(-D)$ je diferenciálny operátor sám

o sebe a z rovnice (1.13) plynie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\{r_j(-D)\Phi(x)\} = r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Takže pre funkciu $R_j(x)$, ktorú hľadáme, platí

$$R_j(x) = r_j(-d/dx)\Phi(x), \quad (1.14)$$

pre $j \geq 1$.

Ďalej vieme, že $r_j(u)$ je polynóm v u . A teda ak by sme sa pozreli na $r_j(-D)$, tak vieme, že sa dá (1.14) rozviesť do tvaru:

$$r_j(-D)\Phi(x) = c_0\Phi(x) + c_1(-D)\Phi(x) + c_2(-D)^2\Phi(x) + \dots$$

A pri bližšom preskúmaní rozvoju (1.9) môžeme vidieť, že r_j obsahuje členy minimálneho stupňa $j + 2$. A teda pri prepise $r_j(-D)\Phi(x)$ vždy bude obsahovať člen s deriváciou $\phi(x)$ v minimálnom stupni aspoň 3.

To znamená:

$$r_j(-D)\Phi(x) = c_{j+2}(-D)^{j+2}\Phi(x) + c_{j+3}(-D)^{j+3}\Phi(x) + \dots$$

Teraz sa pozrieme na členy $D^j\Phi(x)$ od stupňa 1 do stupňa 6.

$$D^1(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) = \phi(x),$$

$$D^2(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(-x) = \phi(x)(-x),$$

$$D^3(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^2 - 1) = \phi(x)(x^2 - 1),$$

$$D^4(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^3 - x) = \phi(x)(-x^3 + 3x),$$

$$D^5(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^4 - 6x^2 + 3) = \phi(x)(x^4 - 6x^2 + 3),$$

$$D^6(\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^5 - 10x^3 + 15x) = \phi(x)(-x^5 + 10x^3 - 15x).$$

Ako môžeme vidieť tak všetky $D^j(\Phi(x))$ sú v tvare polynóm krát hustota štandardného rozdelenia. A keďže $r_j(-D)\Phi(x)$ je len súčet násobkov výrazov obsahujúcich polynóm v x a $\phi(x)$. Tak potom môžeme $\phi(x)$ vytiahnuť pred tento výraz a zvyšný polynóm označíme ako p_j .

$$R_j(x) = p_j(x)\phi(x). \quad (1.15)$$

Nadalej si ukážeme ako vypočítať p_1 a p_2 . Ukážka pre p_1 :

$$\begin{aligned} p_1(x)\phi(x) &= R_1(x) = r_1(-D)\Phi(x) = \frac{1}{6}\kappa_3(-D)^3\Phi(x) \\ &= -\frac{1}{6}\kappa_3\phi(x)(x^2 - 1) = -\frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1)\phi(x). \end{aligned}$$

A teda:

$$p_1(x) = -\frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1). \quad (1.16)$$

Ukážka pre p_2 :

$$\begin{aligned} p_2(x)\phi(x) &= R_2(x) = r_2(-D)\Phi(x) = \left(\frac{1}{24}\kappa_4(-D)^4 + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-D)^6\right)\Phi(x) \\ &= \frac{1}{24}\kappa_4(-D)^4\Phi(x) + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-D)^6\Phi(x) = \frac{1}{24}\kappa_4\phi(x)(-x^3 + 3x) \\ &\quad + \frac{1}{72}\kappa_3^2\phi(x)(-x^5 + 10x^3 - 15x). \end{aligned}$$

A teda:

$$p_2(x) = \frac{1}{24}\kappa_4(-x^3 + 3x) + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-x^5 + 10x^3 - 15x). \quad (1.17)$$

Poznámka: Polynómy, pri ϕ v $(-1)D^j\Phi(x)$, sa tiež nazývajú Hermitovské polynómy.

1.2.6 Finálne vyjadrenie distribúcie pôvodného rozdelenia

Po dosadení (1.15) do (1.12) dostávame vyjadrenie v tvare.

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-(j/2)} p_j(x)\phi(x) + \dots, \quad (1.18)$$

Formulácia v tvare (1.18) sa nazýva Edgeworthsov rozvoj distribučnej funkcie pre náhodnú veličinu S_n .

1.2.7 Aproximácia vyjadrenia distribúcie pôvodného rozdelenia

Rozvoj (1.18) iba v zriedkavých prípadoch konverguje ako nekonečná rada. Pokiaľ je X_i absolútne spojitá náhodná veličina, potom nutná podmienka, ktorá musí byť splnená na zaručenie konverencie, je $E\{\exp(\frac{1}{4}X_i^2)\} < \infty$ Cramér (1928, str. 64-66). Toto je veľmi silná podmienka, ktorá zlyháva už pokiaľ by X_i pochádzali z Exponenciálneho rozdelenia. Preto obvykle (1.18) je prípustná len ako asymptotická rada (asymptoticky rozvoj), ktorá je popísaná nižšie.

Asymptotickým rozvojom myslíme, že ak by sme zobrali do úvahy len prvých niekoľko členov rady, tak zvyšok rady je menšieho stupňa než posledný člen rady:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-(j/2)} p_j(x)\phi(x) + o(n^{-j/2}), \quad (1.19)$$

Tento rozvoj by mal spĺňať stejnomernu konvergenciu v x pre pevné j pri $n \rightarrow \infty$ za splnení istých podmienok.

Ukážka pre rozdelenie o jednom koeficiente Edgeworthsovho rozvoja:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) - n^{-1/2} \frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1)\phi(x) + o(n^{-1/2}).$$

Pre rozdelenie o dvoch koeficientoch Edgeworthsovo rozvoja:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) - n^{-1/2} \frac{1}{6} \kappa_3(x^2 - 1)\phi(x) + n^{-1} \left(\frac{1}{24} \kappa_4(-x^3 + 3x) + \frac{1}{72} \kappa_3^2(-x^5 + 10x^3 - 15x) \right) \phi^{(1)}(x) + o(n^{-1}).$$

Postačujúce podmienky pre (1.19), so zvyškom uvedeného stupňa, sú

$$E(|X_i|^{j+2}) < \infty \quad \text{a} \quad \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\psi_{X_i}(t)| < 1.$$

Druhá podmienka (nazývaná tiež Cramérova podmienka) je splnená pre rozdelenia, ktoré majú nedegenerovanú absolútne spojitú komponentu, napr. pre spojité rozdelenia (váz. Hall (1992, str. 46)). Nedegenerovanú absolútne spojitú komponentu majú rozdelenia, ktoré nie sú singulárne. Singulárne rozdelenia majú pravdepodobnostné rozdelenie koncentrované na množinách Lebesgueovej miery nula (príkladom takého rozdelenia sú diskrétna rozdelenia, ale aj Cantorové rozdelenie tiež nazývané ako devil's staircase, Dovgoshey a kol. (2006, str. 2)).

1.3 Príklad na exponenciálnom rozdelení

Ukážeme v predchádzajúcej sekcii popísaný postup pre odvodenie asymptotického rozdelenia normovaného súčtu 3 exponenciálnych rozdelení založenom na centrálnej limitnej vete, Edgeworthsovom rozvoji s jedným členom a Edgeworthsovom rozvoji s dvoma členmi. a lineárnou transformáciou gama rozdelenia, ktoré je presné rozdelenie pre konečný súčet nezávislých rovnako rozdelených veličín z exponenciálneho rozdelenia. Pre začiatok majme X_1, X_2, X_3 nezávislé náhodné veličiny z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 1$. A bude nás zaujímať

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{X_i - 1}{1} \right).$$

1.3.1 Normálna aproximácia

Podľa centrálnej limitnej vety platí, že:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N(0,1),$$

kde $\bar{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^3 X_i$ a σ je smerodajnou odchýlkou. V našom prípade $\mu = 1$, tým pádom $\sigma^2 = 1$ a $n = 3$.

Takže normovaný súčet je v tvare:

$$\sqrt{3} \frac{\bar{X} - 1}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{X_i - 1}{1} \right) = S_3$$

A ten má byť približne $N(0,1)$ pokiaľ by bolo n dostatočne veľké, čo 3 nie je, ale použijeme toto rozdelenie pre referenciu vzhľadom k tomu, či a o koľko bude Edgeworthsov rozvoj presnejší.

Potom S_3 môžeme aproximovať na základe centrálnej limitnej vety rozdelením $N(0,1)$.

1.3.2 Edgeworthsov rozvoj s jedným a dvoma členmi

Pre Edgeworthsov rozvoj si zavedieme $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, pre $i \in \{1, 2, 3\}$. Kde σ je smerodajná odchýlka. Čo znamená, že $Y_i = X_i - 1$.

Poznámka: Náhodné veličiny Y_i nepochádza z exponenciálneho rozdelenia, ale z posunutého exponenciálneho rozdelenia. A pretože X_i boli nezávislé a rovnako rozdelené tak Y_i sú tiež.

Pre výpočet členov Edgeworthsovho rozvoja potrebujeme kumulanty. Pre prvé dva členy Edgeworthsovho rozvoja nám budú stačiť kumulanty do 4 stupňa. V (1.6) sme odvodili vzorce pre prvé 4 členy.

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_1 - 1] = \mathbb{E}[X_1] - 1 = 0 \\ \kappa_2 &= \text{var}[Y_1] = \text{var}[X_1 - 1] = \text{var}[X_1] = 1 \\ \kappa_3 &= \mathbb{E}[Y_1 - (\mathbb{E}[Y_1])]^3 = \mathbb{E}[Y_1]^3 = \mathbb{E}[X_1 - 1]^3 \\ &= \mathbb{E}[X_1]^3 - 3\mathbb{E}[X_1]^2 + 3\mathbb{E}[X_1] - 1 = 6 - 6 + 3 - 1 = 2 \\ \kappa_4 &= \mathbb{E}[Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]]^4 - 3(\text{var}(Y))^2 = \mathbb{E}[Y_1]^4 - 3 \\ &= \mathbb{E}[X_1]^4 - 4\mathbb{E}[X_1]^3 + 6\mathbb{E}[X_1]^2 - 4\mathbb{E}[X_1] + 1 \\ &= 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9.\end{aligned}$$

Potom môžeme priamo z (1.16) a (1.17) vyjadriť $p_1(x)$ a $p_2(x)$:

$$\begin{aligned}p_1(x) &= -\frac{1}{3}(x^2 - 1) \\ p_2(x) &= \frac{3}{8}(-x^3 + 3x) + \frac{1}{18}(-x^5 + 10x^3 - 15x).\end{aligned}$$

A tým pádom finálne vyjadrenie pre aproximáciu rozdelenia S_n založenej na Edgeworthsovom rozvoji s jedným členom je:

$$P(S_3 \leq x) \text{ aproximujeme výrazom } \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}p_1(x)\phi(x).$$

A pre 2 členy Edgeworthsovho rozvoju:

$$P(S_3 \leq x) \text{ aproximujeme výrazom } \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}p_1(x)\phi(x) + \frac{1}{3}p_2(x)\phi(x).$$

1.3.3 Presné rozdelenie

Vieme, že ak X_1, X_2, X_3 sú nezávislé z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 1$. Potom $\sum_{i=1}^3 X_i \sim \Gamma(3, 1)$. To znamená, že náš súčet:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^3 (X_i - 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^3 X_i - 3 \right), \\ \sqrt{3}S_n + 3 &= \sum_{i=1}^3 X_i,\end{aligned}$$

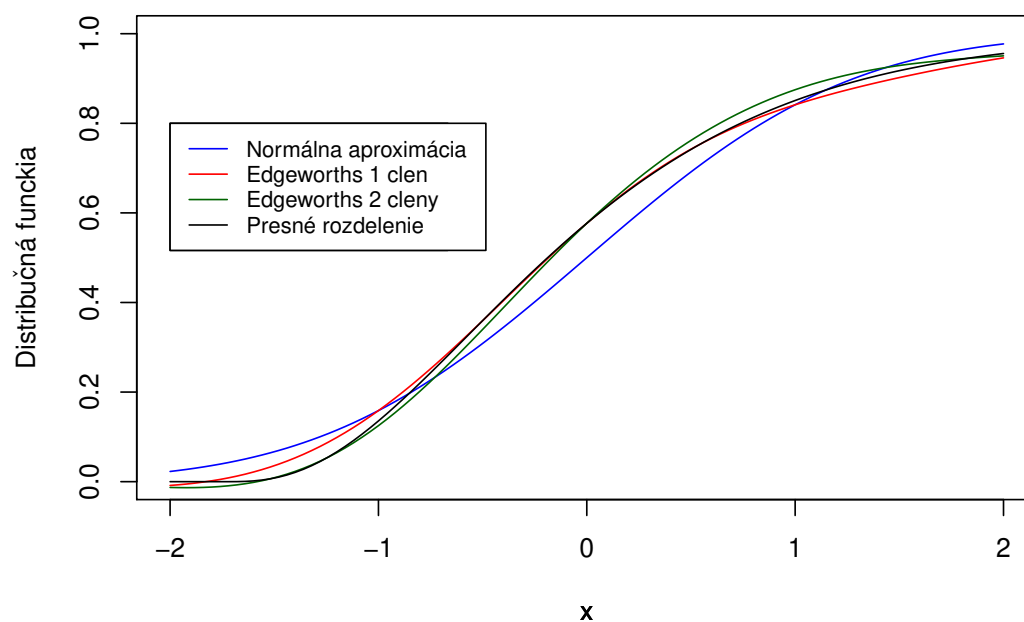
$$P(\sqrt{3}S_n + 3 \leq x) = G_3(x),$$

kde $G_3(x)$ je distribučná funkcia $\Gamma(3, 1)$. Potom platí:

$$P(S_n \leq x) = G_3(\sqrt{3}x + 3).$$

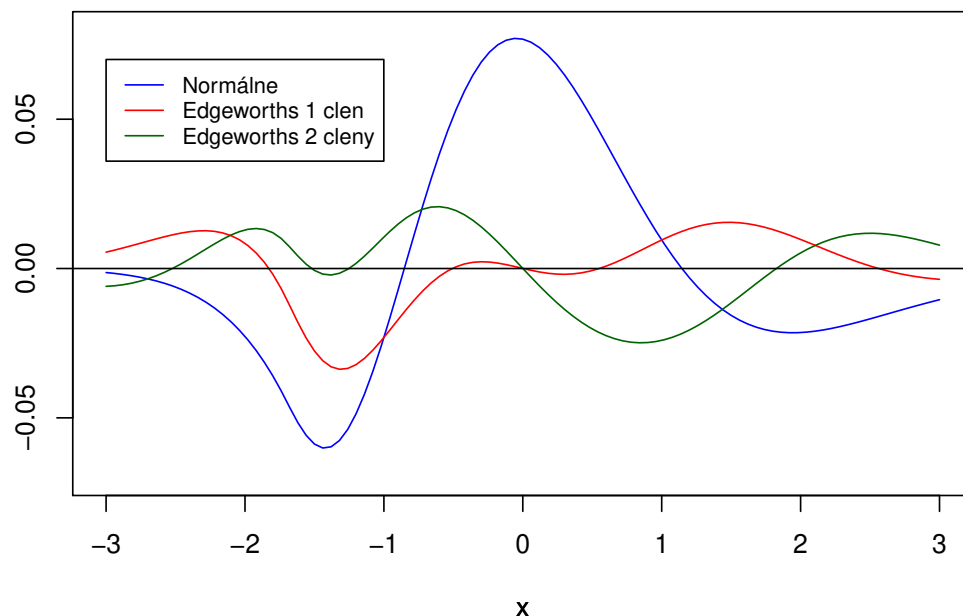
1.3.4 Grafické porovnanie

Na nasledujúcom obrázku môžeme vidieť jednotlivé aproximácie:



Obrázek 1.1: Porovnanie jednotlivých aproximácií so skutočným rozdelením.

Z Obrázku 1.1 môžeme pozorovať, že obe aproximácie, ktoré mali v sebe členy Edgeworthsovhovho rozvoju sú "bližšie" než aproximácia normálnym rozdelením. Pre lepšie porovnanie sa pozrieme na grafy rozdielu skutočného rozdelenia S_n a pozorovaného rozdelenia:



Obrázek 1.2: Porovnanie rozdielu skutočného rozdelenia a jednotlivých aproximácií .

Z grafu 1.2 je vidieť, že pre niektoré hodnoty x je normálne rozdelenie lepšia aproximácia skutočného rozdelenia ako Edgeworthsov rozvoj, ale ak by sme skúmali:

$$K_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - F_n(x)|,$$

kde $F(x)$ je skutočná distribučná funkcia rozdelenia S_n a F_n sú jednotlivé aproximácie. Tak by sme došli k záveru, že Edgeworthsova aproximácia s jedným a aj Edgeworthsova aproximácia s dvoma členmi má túto veličinu K_n menšiu než normálne rozdelenie. Približné hodnoty tejto veličiny sú zhodnotené v tabuľke 1.1.

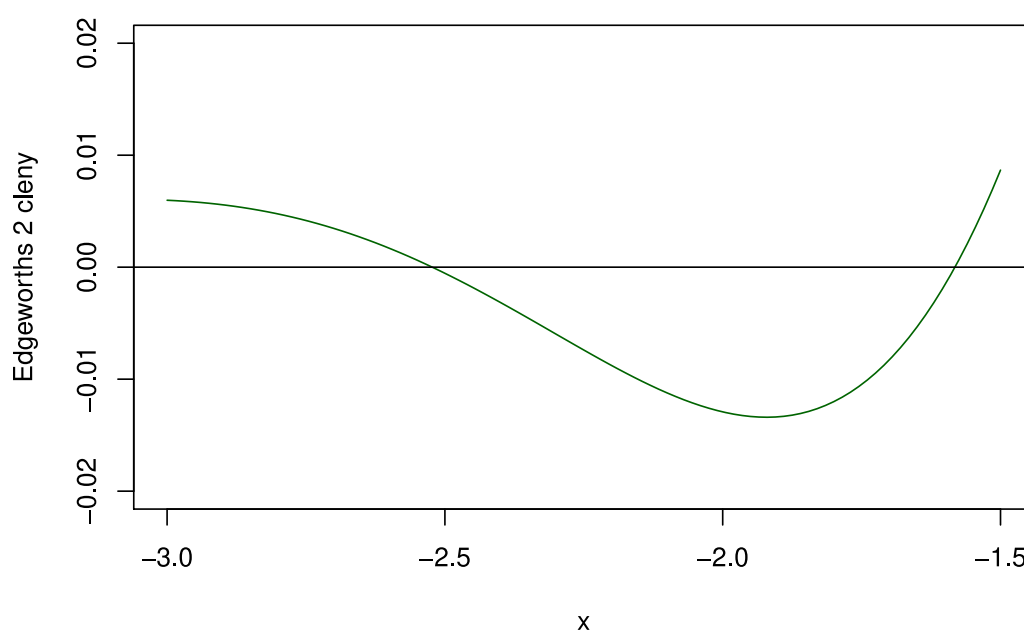
Aproximácia / hodnota K_n	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 30$
Normálna aproximácia	≈ 0.077	≈ 0.059	≈ 0.042	≈ 0.024
Edgeworthsov rozvoj s 1 členom	≈ 0.034	≈ 0.017	≈ 0.003	≈ 0.001
Edgeworthsov rozvoj s 2 členmi	≈ 0.024	≈ 0.004	≈ 0.001	$\approx 2 * 10^{-4}$

Tabulka 1.1: Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.

Z tejto tabuľky môžeme vidieť, že hodnota veličiny K_n klesá s väčším počtom členov Edgeworthsovej aproximácie.

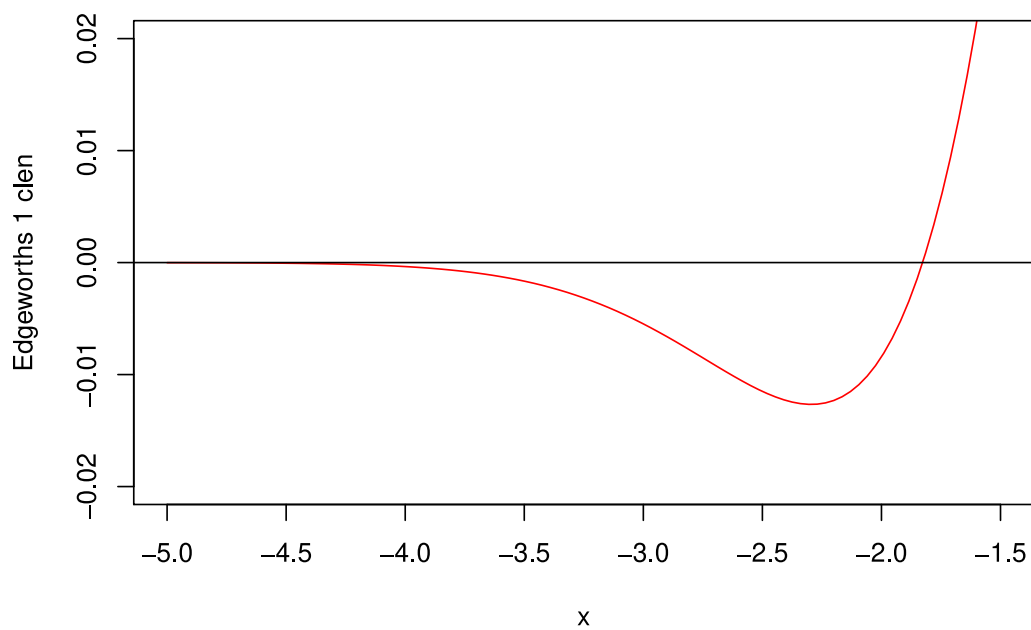
1.3.5 Problémy Edgeworthsovej aproximácie

Ako sme mohli vidieť v predchádzajúcej časti, tak Edgeworthsov rozvoj aproximuje skutočné rozdelenie "presnejšie" než normálna aproximácia. Edgeworthsov rozvoj má i nevýhody, napr. ak by sme sa pozreli na graf 1.3 Edgeworthsového rozvoja o dvoch členoch aproximácie distribučnej funkcie rozdelenia na interval $(-3, -1)$:



Obrázek 1.3: Edgeworthsova aproximácia o dvoch členoch.

Môžeme vidieť, že Táto aproximácia neklesajúcej funkcie s oborom hodnôt medzi 0 a 1, je v bode -2 záporná a jasne na intervale $(-3, -2)$ klesá. Rovnaký problém môžeme pozorovať aj pre Edgeworthsového rozdelenie s jedným členom, ukážka na grafe 1.4.



Obrázek 1.4: Edgeworthsova aproximácia o jednom člene.

Tento problém je spôsobený chybou $o(n^{-1})$ a $o(n^{-1/2})$ vo vzorci (1.20) a (1.20). Edgeworthsová aproximácia distribučnej funkcie nemusí ani splňovať vlastnosti distribučnej funkcie.

2. Zobecnenie Edgeworthsovho rozvoja

2.1 Edgeworthsov rozvoj pre hladkú transformáciu súčtu náhodných veličín

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali ako môžeme použiť Edgeworthsov rozvoj na aproximáciu distribučnej funkcie normovaného súčtu nezávislých rovnako rozdelených veličín. V tejto kapitole by sme to chceli rozšíriť na dostatočne hladké transformácie súčtu nezávislých rovnako rozdelených veličín.

2.1.1 Hladká transformácia

Na začiatok si zavedieme hladkú modelovú transformáciu. Nech $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené d -rozmerné náhodné vektory so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}$, a $\bar{\mathbf{X}}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$. A nech $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkcia splňujúca $A(\boldsymbol{\mu}) = 0$ a $A(\mathbf{x})$ je tvaru:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})}{h(\boldsymbol{\mu})} \quad (2.1)$$

alebo

$$A(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})}{h(\mathbf{x})} \quad (2.2)$$

kde označme $\theta_0 = g(\boldsymbol{\mu})$ a jeho odhad $\hat{\theta}_n = g(\bar{\mathbf{X}}_n)$. Potom nech $h(\boldsymbol{\mu})^2$ je asymptoticky rozptyl $n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ alebo $h(\bar{\mathbf{X}}_n)$, je odhad $h(\boldsymbol{\mu})$. (Uvažujeme, že h je známa funkcie.). Takúto funkciu A budeme nazývať hladká modelová funkcia.

Táto hladká modelová funkcia nám dovoľuje skúmať úlohy, kde θ_0 je stredná hodnota, rozptyl, podiel stredných hodnôt, podiel rozptylov, rozdiel stredných hodnôt alebo rozptylov, alebo korelačný koeficient atď.

2.1.2 Príklad hladkých transformácií

Nech $\{W_1, \dots, W_n\}$ je náhodný výber z jednorozmerného rozdelenia so strednou hodnotou m a rozptylom β^2 . A máme za úlohu odhadnúť parameter $\theta_0 = m$, potom by sme zvolili $d = 2$, $\mathbf{X}_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)})^T = (W_i, W_i^2)^T$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{X}_i)$, potom:

$$g(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)}, h^2(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(2)} - (x^{(1)})^2.$$

V tomto prípade platí že:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\mu}) &= m, g(\bar{\mathbf{X}}_n) = \bar{W}_n, \\ h^2(\boldsymbol{\mu}) &= \beta^2, \end{aligned}$$

a nech:

$$h^2(\bar{\mathbf{X}}_n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{(2)} - \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{(1)} \right)^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(W_i - \bar{W}_n \right)^2 = \hat{\beta}^2.$$

V prípade odhadovania parametru β^2 , potrebujeme: $d = 4$ a $\mathbf{X}_i = \{W_i, W_i^2, W_i^3, W_i^4\}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{X}_i)$ potom nech $Y_i = (W_i - \mathbf{E}(W_i))^2$ z toho vyplýva, že $\mathbf{E}(Y_i) = \beta^2$ a $\text{var}(Y_i) = \mathbf{E}(Y_i^2) - \beta^4$ a pre $\mathbf{E}(Y_i^2)$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_i^2) &= \mathbf{E} \left[(W_i - \mathbf{E}(W_i))^4 \right] = \mathbf{E}(W_i^4) - 4 \mathbf{E}(W_i)(\mathbf{E} W_i)^3 + 6 \mathbf{E}(W_i^2)(\mathbf{E} W_i)^2 \\ &\quad - 4 \mathbf{E}(W_i^3) \mathbf{E}(W_i) - (\mathbf{E} W_i)^4 \\ &= \mathbf{E}(W_i^4) - 3(\mathbf{E} W_i)^4 + 6 \mathbf{E}(W_i^2)(\mathbf{E} W_i)^2 - 4 \mathbf{E}(W_i^3) \mathbf{E}(W_i) \end{aligned}$$

Tým pádom:

$$\begin{aligned} g(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) &= x^{(2)} - (x^{(1)})^2 \\ h^2(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) &= x^{(4)} - 4x^{(1)}x^{(3)} + 6(x^{(1)})^2x^{(2)} - 3(x^{(1)})^4 - (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)^2 \end{aligned}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\mu}) &= \beta^2 \\ g(\bar{\mathbf{X}}_n) &= \hat{\beta}_n^2 \\ h^2(\boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{E}(W_i - m)^4 - \beta^4 \\ h^2(\bar{\mathbf{X}}_n) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - \hat{\beta}^4 \end{aligned}$$

Tým pádom sme odvodili hladkú transformáciu pre aproximáciu rozdelenia štandardizovaného rozptylu.

2.1.3 Edgeworthsov rozvoj pre hladkú transformáciu

V nasledujúcej vete je zhrnutý Edgeworthsov rozvoj pre hladké transformácie.

Věta 1. [Hall, 1992, str. 56] Nech $j \geq 1$ a funkcia A je tvaru (2.1) alebo (2.2) a má spojité derivácie stupňa $j+2$ na nejakom okolí bodu $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}[\mathbf{X}]$. Nadalej nech $A(\boldsymbol{\mu}) = 0$, $\mathbf{E}[\|\mathbf{X}\|^{j+2}] < \infty$ a zároveň platí, pre charakteristickú funkcia $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, že

$$\limsup_{\|\mathbf{t}\| \rightarrow \infty} |\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| < 1,$$

potom platí pre rozdelenie $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$:

$$P(n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2}p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-j/2}p_j(x)\phi(x) + o(n^{-j/2}), \quad (2.3)$$

kde $p_r(x)$ sú polynómy maximálneho stupňa $3j-1$, nepárny pre párne j a párny pre nepárne j s koeficientami závisiacimi na momentoch \mathbf{X} do stupňa $j+2$.

Důkaz. Jednotlivé kroky důkazu sú podrobne popísané v práci Hall (1992, str. 52-56).

□

Táto veta nám hovorí o existencii, Edgeworthsovho rozvoju, v nasledujúcich častiach ukážeme náznak odvodu pre polynóm p_1 a jeho vzorec pre výpočet. Pre výpočet polynómu p_1 využijeme vetu 1 pre $j = 1$.

2.1.4 Rozvoj hladkej transformácie za pomoci Taylorovho rozvoja

Budeme sa snažiť odvodiť prvý člen Edgeworthsovej aproximácie podobným spôsobom ako to bolo v kapitole 1. Na začiatku si musíme stanoviť, čo je S_n z kapitoly 1. a ku tejto veličine budeme odvádzať Edgeworthsov rozvoj:

$$S_n = n^{1/2} A(\bar{X}_n)$$

S_n nie je vo forme sumy, oproti tomu ako to bolo v kapitole 1. Preto si zavedieme $Z_n = n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)$ a

$$a_{i_1, \dots, i_j} = \left(\frac{\partial^{(j)}}{\partial x^{(i_1)}, \dots, \partial x^{(i_j)}} \right) A(x)|_{x=\mu}. \quad (2.4)$$

Potom pretože predpokladáme, že $A(\mu) = 0$, tak môžeme heuristicky rozviesť $S_n = n^{1/2} A(\bar{X}_n)$ za pomoci Taylorovho rozvoja v bode μ . (Jarník, 1984, str. 415 - 416)

$$\begin{aligned} S_n = & n^{1/2} A(\mu) + \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)} + \dots \\ & + n^{-(r-1)/2} \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d a_{i_1, \dots, i_r} Z_n^{(i_1)} \dots Z_n^{(i_r)} \\ & + n^{-r/2} \frac{1}{(r+1)!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_{r+1}=1}^d \left(\frac{\partial^{(r+1)}}{\partial x^{(i_1)}, \dots, \partial x^{(i_{r+1})}} \right) A(x)|_{x=\xi^*} Z_n^{(i_1)} \dots Z_n^{(i_{r+1})}, \end{aligned}$$

kde ξ^* sa nachádza medzi \bar{X} a μ . Naďalej vieme z centrálnej limitnej vety, že $Z_n = O_p(1)$ a, že $A(\mu) = 0$. Potom pretože $A(x)$ má spojité derivácie do $r+1$ stupňa na okolí μ (váz. veta 1 pre $j+1 = r$), a $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, tak môžeme predpokladať, že od istého $n_0 \in \mathbb{N}$ bude \bar{X}_n z okolia μ , a $\left(\frac{\partial^{(r+1)}}{\partial x^{(i_1)}, \dots, \partial x^{(i_{r+1})}} \right) A(x)|_{x=\xi^*}$ obmedzené pre všetky ξ^* nachádzajúce sa medzi \bar{X}_n a μ , pre $n \geq n_0$. A teda môžeme S_n rozdeliť na 2 časti:

$$S_n = S_{n,r} + O_p(n^{-r/2}),$$

kde $r \geq 1$ a $S_{n,r}$ je tvare:

$$S_{n,r} = \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)} + \dots \\ + n^{-(r-1)/2} \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d a_{i_1, \dots, i_r} Z_n^{(i_1)} \dots Z_n^{(i_r)}. \quad (2.5)$$

Pre odvodenie členu $p_1(x)$ Edgeworthsovhovho rozvoja nás bude zaujímať $r = 2$:

$$S_{n,2} = \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)}.$$

Teraz môžeme pokračovať v odvodzovaní charakteristickej funkcie pre S_n , naďalej pri určovaní charakteristickej funkcie položíme $S_n = S_{n,r}$ a zanedbáme chybový člen $O_p(n^{-r/2})$. (Pre definíciu O_p a o_p vtz. Appendix definícia 4)

2.1.5 Odvodenie charakteristickej funkcie pre $S_{n,2}$

Za pomoci prepisu charakteristickej funkcie pomocou komulantov dostávame:

$$\psi_n(t) = E(\exp(itS_{n,2})) = \exp(\kappa_{1,n,2}it + \frac{1}{2}\kappa_{2,n,2}(it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_{j,n,2}(it)^j + \dots), \quad (2.6)$$

kde $\kappa_{j,n,2}$ je j -ty kumulant náhodnej veličiny $S_{n,2}$ a je stupňa $n^{-(j-2)/2}$ (vzt. (1.7)). Pri odvodzovaní kulantov v kapitole 1, hneď vypadol člen κ_1 , pretože to bol rovný 0 a člen κ_2 bol rovný 1. V tomto prípade, pre $S_{n,2}$ to neplatí. Nasledujúcu veta vysvetlí, aké sú kumulanty $S_{n,2}$ a ako ich rozviesť.

Věta 2. [Hall, 1992, str. 53] *Nech $Z_n = n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)$, kde \bar{X}_n je priemer n nezávislých rovnako rozdelených d -rozmerných vektorov ako vektor X_n , ktorý má konečné momenty do stupňa $2j$ a strednú hodnotu μ a*

$$S_{n,2} = \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)}$$

pre ľubovoľné pevné konštanty a_i a a_{i_1, i_2} . Potom j -ty kumulant $S_{n,2}$ má formu:

$$\kappa_{j,n,2} = n^{-(j-2)/2}(k_{j,1} + n^{-1}k_{j,2} + n^{-2}k_{j,3} + \dots), \quad (2.7)$$

kde konštanty $k_{j,l}$ závisia, len na konštantách a_i , a_{i_1, i_2} , a na momentoch X až do $2j$ -tého stupňa.

Důkaz. Jednotlivé kroky dôkazu obecnnejšej vety (pre $S_{n,r}$) sú podrobne popísané v práci Hall (1992, str. 59-65). □

Z vety 2 vyplýva, že j -ty kumulant $S_{n,2}$ je v tvare (2.7). pre konštanty $k_{1,1} = 0$ pretože pre $S_{n,2}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} E[S_{n,2}] = 0$ ako bude vidieť z (2.13) pre $n \rightarrow \infty$

A pre $k_{2,1} = 1$ čo platí pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}[S_{n,2}] = 1$, čo sa dá ukázať tým, že na výraz $n^{1/2}(g(\bar{\mathbf{X}}_n) - g(\boldsymbol{\mu}))$ aplikujeme delta vetu (váz. apendix veta 6 pre delta vetu a váz. apendix veta 7 pre rozdelenie asymptotické rozdelenie $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$):

$$n^{1/2}(g(\bar{\mathbf{X}}_n) - g(\boldsymbol{\mu})) \rightarrow N(0, \nabla g(\boldsymbol{\mu})^T \Sigma(\boldsymbol{\mu}) \nabla g(\boldsymbol{\mu}))$$

A teda dostávame, že asymptoticky rozdiel $h^2(\boldsymbol{\mu})$, že

$$h^2(\boldsymbol{\mu}) = \nabla g(\boldsymbol{\mu})^T \Sigma(\boldsymbol{\mu}) \nabla g(\boldsymbol{\mu})$$

Takže stačí ukázať, že rozptyl $S_{n,2}$ pre $n \rightarrow \infty$ je rovný $\nabla g(\boldsymbol{\mu})^T \Sigma(\boldsymbol{\mu}) \nabla g(\boldsymbol{\mu}) / h^2(\boldsymbol{\mu})$ čo bude ukázané v (2.13) pokiaľ zoberieme do úvahy, že:

$$a_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})}. \quad (2.8)$$

Teraz budeme pokračovať v odvodzovaní charakteristickej funkcie pre $S_{n,2}$, tým že dosadíme konštanty $k_{j,i}$ z vety 2 späť do charakteristickej funkcie z (2.6), tak dostávame:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) = \exp \left(-\frac{1}{2}t^2 + n^{-1/2} \left(k_{1,2}(it) + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3 \right) \right. \\ \left. + n^{-1} \left(\frac{1}{2}k_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24}k_{4,1}(it)^4 \right) \dots \right). \end{aligned}$$

Čo môžeme prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \psi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(1 + n^{-1/2} \left[k_{1,2}(it) + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3 \right] \right. \\ \left. + n^{-1} \left[\left(\frac{1}{2}k_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24}k_{4,1}(it)^4 \right) + \frac{1}{2} \left(k_{1,2}(it) + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3 \right)^2 \right] + \dots \right). \end{aligned}$$

A z tohto tvaru môžeme vyjadriť r_1 a r_2 :

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} + n^{-1/2}r_1(it)e^{-\frac{1}{2}t^2} + n^{-1}r_2(it)e^{-\frac{1}{2}t^2} + \dots + n^{-j/2}r_j(it)e^{-\frac{1}{2}t^2} + \dots$$

Vyjadrenie r_1 a r_2 :

$$\begin{aligned} r_1(x) &= k_{1,2}x + \frac{1}{6}k_{3,1}x^3, \\ r_2(x) &= \left(\frac{1}{2}k_{2,2}x^2 + \frac{1}{24}k_{4,1}x^4 \right) + \frac{1}{2} \left(k_{1,2}x + \frac{1}{6}k_{3,1}x^3 \right)^2. \end{aligned}$$

Potom môžeme z tohto výrazu odvodzovať p_1 rovnakým postupom ako v kapitole 1 (váz (1.14) a (1.15)).

2.1.6 Vyjadrenie p_1 Edgeworthsovho rozvoja

V tejto časti si zavedieme nasledujúce značenie pre zjednodušenie zápisu:

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_j)} = X^{(i_j)} - \mu^{(i_j)}.$$

Nadalej sa pozrieme bližšie na vyjadrenie (2.5) a pokúsime sa vyjadriť p_1 , ktorý je 1. členom Edgeworthsovho rozvoja. A jediným členom, ak by sme chceli funkciu S_n aproximovať súčtom $S_{n,r}$ pre $r = 2$. (pre pripomenutie $\mathbf{Z}_n = n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$). Pre vyjadrenie p_1 potrebujeme poznať prvé 3 kumulanty a tým pádom aj prvé 3 momenty $S_{n,2}$. Nech

$$\mu_{i_1, \dots, i_j} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)} \dots (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_j)}], \text{ pre } j \geq 1. \quad (2.9)$$

Potom $\mu_i = 0$ a teda i $E(Z^{(i)}) = 0$ pre každé i .

Pre súčin 2 členov:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^{(i)} Z^{(j)}) &= \mathbb{E}[n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(i)} n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(j)}] \\ &= n \left(\mathbb{E} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(i)}}{n} \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(j)}}{n} \right] \right) \\ &= n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_l - \boldsymbol{\mu})^{(j)}] \right) \\ &\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(j)}] \right) \\ &= \mu_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pre súčin 3 členov:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)}) &= \mathbb{E}[n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(i)} n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(j)} n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(k)}] \\ &= n^{3/2} \left(\mathbb{E} \left[\frac{\sum_{r=1}^n (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}}{n} \frac{\sum_{s=1}^n (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)}}{n} \frac{\sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^{(k)}}{n} \right] \right) \\ &= n^{-3/2} \left(\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^{(k)}] \right) \\ &\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-3/2} \left(\sum_{r=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(k)}] \right) \\ &= n^{-1/2} \mu_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pre súčin 4 členov:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Z^{(i)} Z^{(j)} Z^{(k)} Z^{(l)}) \\
&= n^{-2} \left(\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{u=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^{(k)} (\mathbf{X}_u - \boldsymbol{\mu})^{(l)}] \right) \\
&\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-2} \left(\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(k)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(l)}] \right. \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(k)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(l)}] \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(l)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(k)}] \\
&\quad \left. - 2 \sum_{r=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(j)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(k)} (\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(l)}] \right) \\
&\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-2} \left(n^2 \mu_{i,j} \mu_{k,l} + n^2 \mu_{i,k} \mu_{j,l} + n^2 \mu_{i,l} \mu_{k,j} - 2n \mu_{i,j,k,l} \right) \\
&= \mu_{i,j} \mu_{k,l} + \mu_{i,k} \mu_{j,l} + \mu_{i,l} \mu_{k,j} + O(n^{-1})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Momentálne keď si zoberieme $r = 2$ z vyjadrenia (2.5), tak dostávame vyjadrenie pre S_n :

$$S_{n,2} = \sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z^{(i_1)} Z^{(i_2)} + O(n^{-1}).$$

A pre momenty $S_{n,2}$ platí (za použitia predchádzajúcich vzorcov (2.10), (2.11) a (2.12)), že:

$$E[S_{n,2}] = n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} + O(n^{-1}), \tag{2.13}$$

$$E[S_{n,2}^2] = \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2} + O(n^{-1}),$$

$$\begin{aligned}
E[S_{n,2}^3] &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} n^{-1/2} \mu_{i_1, i_2, i_3} \\
&\quad + 3 \frac{1}{2} n^{-1/2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} (\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} + \mu_{i_1, i_3} \mu_{i_2, i_4} + \mu_{i_1, i_4} \mu_{i_2, i_3}) \\
&\quad + O(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Keď už máme prvé tri momenty $S_{n,2}$ vyjadrené, tak môžeme vyjadriť kumulanty:

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,n} &= E[S_{n,2}] = n^{-1/2} A_1 + O(n^{-1}) \\
\kappa_{2,n} &= E[S_{n,2}^2] - (E[S_{n,2}])^2 = \sigma^2 + O(n^{-1}) \\
\kappa_{3,n} &= E[S_{n,2}^3] - 3E[S_{n,2}^2]E[S_{n,2}] + 2(E[S_{n,2}])^3 = n^{-1/2} A_3 + O(n^{-1})
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Kde:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} \\
\sigma^2 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2} \\
A_3 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + 3 \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ak si spomenieme, že pre kumulanty $S_{n,2}$ platí, že sa dajú vyjadriť v tvare:

$$\kappa_{j,n,2} = n^{-(j-2)/2} (k_{j,1} + n^{-1} k_{j,2} + \dots)$$

Tak môžeme vidieť, že $k_{1,2} = A_1$, $k_{3,1} = A_3$. Vďaka tomu, že $S_{n,2}$ má jednotkový rozptyl, tak $\sigma^2 = 1$ čo sa dá vidieť z (2.14), a teda máme všetky informácie na vyjadrenie p_1 .

Poznámka: Ak by sme na začiatku uvažovali $A(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})$, tak potom by Edgeworthsov rozvoj z vety 1 musel byť upravený nasledujúco:

$$P\left(n^{1/2} \frac{A(\bar{\mathbf{X}}_n)}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x) \phi(x) + \dots + n^{-j/2} p_j(x) \phi(x) + o(n^{-j/2}) \tag{2.16}$$

s tým, že členy a_{i_1, i_2} a a_{i_1} by bolo počítané z derivácií výrazu $A(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})$, členy μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1} zostávajú rovnaké. Potom by $k_{1,2} = A_1/\sigma$, $k_{3,1} = A_3/\sigma^3$.

2.1.7 Finálny vzorec pre výpočet p_1 Edgeworthsovo rozvoja

Nech A_1 , $\sigma^2 > 0$ a A_3 sú počítané ako v (2.15) potom:

$$p_1(x) = -A_1 \sigma^{-1} - \frac{1}{6} A_3 \sigma^{-3} (x^2 - 1) \tag{2.17}$$

Tento výraz platí pre $A(\mathbf{x})$ z (2.1) alebo (2.2) a aproximáciu $P(n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n) \leq x)$ z vety 1 s tým, že $\sigma = 1$. A tiež tento výraz platí pre $A(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})$ a aproximáciu v tvare (2.16).

Tým sme odvodili p_1 člen Edgeworthsového rozvoja pre hladkú transformáciu súčtu náhodných veličín.

2.2 Cornish-Fisherov rozvoj

V viacerých štatistických testoch nás nezaujíma len aproximácia rozdelenia náhodnej veličiny ale aj kvantily na úrovni α . Edgeworthsov rozvoj nám udáva aproximáciu distribučnej funkcie rozdelenia a pokiaľ by sme toto rozdelenie použili pre aproximácie kvantilov, tak rozvoj založený na Edgeworthsovom pre odhady kvantilov sa nazývať Cornish-Fisherov rozvoj.

2.2.1 Zavedenie rozvoja

Nech S_n je náhodná veličina, ktorej rozdelenie umožňuje Edgeworthsov rozvoj do asymptotickej rady. Potom nech: $w_\alpha = w_\alpha(n)$ nech je α kvantil náhodnej veličiny S_n definovaný ako:

$$w_\alpha = \inf\{x : P(S_n \leq x) \geq \alpha\}.$$

A nech u_α je alfa kvantil štandardného normálneho rozdelenia $\Phi(u_\alpha) = \alpha$. Potom zavedieme nasledujúce rozvoj:

$$w_\alpha = u_\alpha + n^{-1/2}p_{11}(u_\alpha) + n^{-1}p_{21}(u_\alpha) + \dots, \quad (2.18)$$

a tiež zavedieme

$$u_\alpha = w_\alpha + n^{-1/2}p_{12}(w_\alpha) + n^{-1}p_{22}(w_\alpha) + \dots, \quad (2.19)$$

kde funkcie p_{j1} a p_{j2} sú polynómy, budeme uvažovať tieto rozvoje ako asymptotické rady a budeme predpokladať, že stejnomerne konvergujú na intervale pre $\alpha \in (\epsilon, 1 - \epsilon)$ pre $\epsilon \in (0, 1/2)$. Oba tieto rozvoje sa nazývajú Cornish-Fisherové rozvoje.

2.2.2 Odvodenie Cornish-Fisherovho rozvoja z Edgeworthsovho rozvoja

Cornish-Fisherovho rozvoj sa dá odvodiť z Edgeworthsovho rozvoja, a polynómy p_{j1} a p_{j2} z (2.18) a (2.19) sú jednoznačne určené polynómom p_i z (2.3). Táto súvislosť sa dá ukázať tým, že do Edgeworthsovho rozvoju v (2.3) dosadíme rozvoj pre w_α :

$$\begin{aligned} P(S_n \leq w_\alpha) = \alpha &= \Phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(u_\alpha)\right) \\ &+ \sum_{i \geq 1} n^{-i/2}p_i\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(u_\alpha)\right) \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(u_\alpha)\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

pre $\alpha \in (0, 1)$. A p_{i2} môžeme vyjadriť z (2.18) a (2.19) a zo vzorca (2.20), a to tým že si zoberme vzorec (2.19) a dosadíme do w_α vzorec (2.18):

$$u_\alpha = u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(u_\alpha) + \sum_{i \geq 1} n^{-i/2}p_{i2}\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(u_\alpha)\right)$$

z čoho vyplýva, že ak poznáme $p_{j1}(x)$ z (2.20), tak vieme potom vyjadriť $p_{i2}(x)$ zo vzorca:

$$\sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(x) + \sum_{i \geq 1} n^{-i/2}p_{i2}\left(x + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(x)\right) = 0. \quad (2.21)$$

2.2.3 Odvodenie p_{11} a p_{21}

Zo vzorca (2.20) sa dá ukázať, že p_{j1} sa musí dať zapísať pomocou p_1, p_2, \dots, p_j , kvôli tomu, že ak by sme rozvinuli funkciu $\Phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2}p_{j1}(u_\alpha)\right)$, potom

členy pre jednotlivé $n^{-j/2}$ sa musia nulovať, a teda môžeme vyjadriť p_{11} a p_{21} , za pomoci všetkých členov radu $n^{-1/2}$ a n^{-1} . Toto vyjadrenie urobíme za pomoci niekoľkých Taylorových rozvojev:

1. člen na rozvoj z (2.20) je $\Phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ a ten rozvineme pre $u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)$ v bode u_α , označme si tento rozvoj θ_1 :

$$\begin{aligned} \theta_1 = \Phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) &= \Phi(u_\alpha) \\ &+ \left(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + n^{-1} p_{21}(u_\alpha) + O(n^{-3/2})\right) \phi(u_\alpha) \\ &+ 1/2 \left((n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha))^2 + O(n^{-3/2})\right) (-u_\alpha) \phi(u_\alpha) \\ &+ O(n^{-3/2}) \end{aligned}$$

Potom pre 2. člen, označme ho θ_2 :

$$\theta_2 = n^{-1/2} p_1\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right),$$

budeme rozvíjať funkciu $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α a zároveň budeme rozvíjať funkciu $p_1(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α .

Pre $p_1(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$p_1\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = p_1(u_\alpha) + p_1'(u_\alpha)(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + O(n^{-1})) + O(n^{-1}),$$

pre $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$\begin{aligned} \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) &= \phi(u_\alpha) + (-u_\alpha)(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + O(n^{-1})) \phi(u_\alpha) \\ &+ O(n^{-1}). \end{aligned}$$

A teda

$$\theta_2 = n^{-1/2} p_1(u_\alpha) \phi(u_\alpha) + n^{-1} \left(p_1'(u_\alpha) \phi(u_\alpha) - u_\alpha p_{11}(u_\alpha) p_1(u_\alpha)\right) + O(n^{-3/2}).$$

Pre 3. člen, označme ho θ_3 :

$$\theta_3 = n^{-1} p_2\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right),$$

budeme rozvíjať funkciu $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α a zároveň budeme rozvíjať funkciu $p_2(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α .

Pre $p_2(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$p_2\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = p_2(u_\alpha) + O(n^{-1/2}),$$

pre $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$\phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = \phi(u_\alpha) + O(n^{-1/2}).$$

A teda

$$\theta_3 = n^{-1} p_2(u_\alpha) \phi(u_\alpha) + O(n^{-3/2}).$$

Pre odvodenie p_{11} a p_{21} nepotrebuje ďalšie členy lebo všetky ostatné členy sú typu $O(n^{-3/2})$ a teda ak predchádzajúce vyjadrenia vložíme do (2.20) tak dostávame:

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\ &= \Phi(u_\alpha) + \left(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + n^{-1} p_{21}(u_\alpha)\right) \phi(u_\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha)\right)^2 u_\alpha \phi(u_\alpha) \\ &\quad + n^{-1/2} \left(p_1(u_\alpha) \phi(u_\alpha) + n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) (p_1'(u_\alpha) - u_\alpha p_1(u_\alpha)) \phi(u_\alpha)\right) \\ &\quad + n^{-1} p_2(u_\alpha) \phi(u_\alpha) + O(n^{-3/2}) \\ &= \alpha + n^{-1/2} (p_{11}(u_\alpha) + p_1(u_\alpha)) \phi(u_\alpha) \\ &\quad + n^{-1} \left(p_{21}(u_\alpha) - \frac{1}{2} u_\alpha p_{11}(u_\alpha)^2 + p_{11}(u_\alpha) (p_1'(u_\alpha) - u_\alpha p_1(u_\alpha)) \right. \\ &\quad \left. + p_2(u_\alpha)\right) \phi(u_\alpha) + O(n^{-3/2}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Z rovnice (2.22) vyplýva, že

$$p_{11}(x) = -p_1(x), \tag{2.23}$$

a

$$p_{21}(x) = p_1(x) p_1'(x) - \frac{1}{2} x p_1(x)^2 - p_2(x). \tag{2.24}$$

Tým sme odvodili prvé 2 členy (2.18).

2.2.4 Vzorce pre p_{12} a p_{22} Cornish-Fisherovho rozvoja

Členy p_{12} a p_{22} sa dajú odvodiť z (2.21).

$$\begin{aligned} n^{-1/2} p_{11}(x) + n^{-1} p_{21}(x) + O(n^{-3/2}) + n^{-1/2} p_{12}(x + n^{-1/2} p_{11}(x) + O(n^{-1})) \\ + n^{-1} p_{22}(x + O(n^{-1/2})) = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Podobne ako p_{i1} môžeme v (2.25) rozviesť p_{12} a p_{22} za pomoci taylorovho rozvoja v bode x .

$$\begin{aligned} n^{-1/2} p_{11}(x) + n^{-1} p_{21}(x) + O(n^{-3/2}) + n^{-1/2} p_{12}(x) + n^{-1} p_{12}'(x) p_{11}(x) + O(n^{-3/2}) \\ + n^{-1} p_{22}(x) + O(n^{-3/2}) = 0 \\ = n^{-1/2} (p_{11}(x) + p_{12}(x)) + n^{-1} (p_{21}(x) + p_{12}'(x) p_{11}(x) + p_{22}(x)) + O(n^{-3/2}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Z (2.26), (2.23) a (2.24) môžeme vidieť, že:

$$p_{12}(x) = -p_{11}(x) = p_1(x),$$

a

$$\begin{aligned} p_{22}(x) &= -p_{21}(x) - p'_{12}(x)p_{11}(x) \\ &= p_1(x)p'_1(x) - \frac{1}{2}xp_1(x)^2 - p_2(x) - p'_1(x)p_1(x) \\ &= -p_2(x) - \frac{1}{2}xp_1(x)^2. \end{aligned}$$

Tým sme odvodili vzorce pre členy p_{21} a p_{22} .

3. Príklady Edgeworthsovo rozvoja

V tejto časti si ukážeme príklady Edgeworthsovo rozvoja o jednom člene.

3.1 Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového rozptylu nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia.

V tomto príklade naviažeme na príklad z kapitoly 1 kde sme Edgeworthsovým rozvojom aproximovali normovaní súčet n nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia o strednej hodnote $\mu = 1$.

3.1.1 Zavedenie odhadu

V tejto časti sa aproximujeme rozdelenie odhadu rozptylu v tvare $\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2$, kde W_1, \dots, W_n pochádzajú z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou λ a hustotou:

$$f_{W_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & \text{kde } x \geq 0, \\ 0, & \text{kde } x < 0. \end{cases}$$

Na začiatok určíme funkciu $A(\mathbf{x})$, ktorá bola popísaná v kapitole 2, príklad hladkých transformácií. Tým pádom zavedme $\mathbf{X}_i = (W_i, W_i^2, W_i^3, W_i^4)^T$ pre $i \in \{1, 2, 3\}$ a vektor $\boldsymbol{\mu} = (E[W_i], E[W_i^2], E[W_i^3], E[W_i^4])^T = (\lambda, 2\lambda^2, 6\lambda^3, 24\lambda^4)^T$. Potom:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= x^{(2)} - (x^{(1)})^2, \\ g(\boldsymbol{\mu}) &= \lambda^2, \\ h^2(\mathbf{x}) &= x^{(4)} - 4x^{(1)}x^{(3)} + 6(x^{(1)})^2x^{(2)} - 3(x^{(1)})^4 - (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)^2, \\ h^2(\boldsymbol{\mu}) &= 8\lambda^4, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Takže $A(\mathbf{x})$ je v tvare:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) - \lambda^2}{h(\mathbf{x})}.$$

A budeme sa snažiť určiť rozdelenie $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ v tvare:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - 1}{\sqrt{\bar{W}_n^4 - 4\bar{W}_n\bar{W}_n^3 + 6(\bar{W}_n)^2\bar{W}_n^2 - 3(\bar{W}_n)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}},$$

čo môžeme prepísať do tvaru:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - 1}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}},$$

ktoré budeme naďalej podľa vety 1 môžeme aproximovať nasledovne:

$$P\left(n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) \leq x\right) = \Phi(x) + n^{-1/2}p_1(x)\phi(x) + o(n^{-1/2}),$$

kde p_1 vypočítame pomocou vzorec (2.17). A pre jeho výpočet budeme potrebovať hodnoty a_i , $a_{i,j}$ a μ_{i_1,i_2} , μ_{i_1,i_2,i_3} pre $i,j,i_1,i_2,i_3 \in 1,2,3,4$ z (2.4).

Dá sa ukázať (DasGupta, 2008, str. 42), že:

$$n^{1/2}\left(\left(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2\right) - \text{var}(W_i)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N\left(0, \mathbb{E}\left(W_i - \mathbb{E}(W_i)\right)^4 - \left(\text{var}(W_i)\right)^2\right)$$

A teda:

$$n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0,1)$$

V tomto príklade sa pokúsime vylepšiť túto aproximáciu za pomoci Edgeworthovho rozvoja pre W_i z exponenciálneho rozdelenia.

Momentálne keď si uvedomíme, že platí ak $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, potom pre $W_i^* = \frac{1}{\lambda}W_i$ platí, že $W_i^* \sim \text{Exp}(1)$. Teraz ak by sme porovnali $A(\bar{\mathbf{X}}_n^*)$, založenú na W_i^* , s $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ dostávame, že:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \frac{g(\bar{\mathbf{X}}_n) - \lambda^2}{h(\bar{\mathbf{X}}_n)} = \frac{\lambda^2 g(\bar{\mathbf{X}}_n^*) - \lambda^2}{\lambda^2 h(\bar{\mathbf{X}}_n^*)} = \frac{g(\bar{\mathbf{X}}_n^*) - 1}{h(\bar{\mathbf{X}}_n^*)} = A(\bar{\mathbf{X}}_n^*)$$

Tento vzťah môžeme ľahko vidieť zo vzorcov (3.1) po dosadení $\bar{\mathbf{X}}_n$ do $g(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x})$ pre $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, a využitie vzťahu $\lambda W_i^* = W_i$. Tým môžeme vidieť, že rozdelenie $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ sa nemení s parametrom λ a teda pre zvyšok príkladu budeme bez ujmy na obecnosti uvažovať, že $\lambda = 1$. A naše $A(\mathbf{x})$ je v tvare:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{(x^{(2)} - (x^{(1)})^2) - 1}{\sqrt{x^{(4)} - 4x^{(1)}x^{(3)} + 6(x^{(1)})^2x^{(2)} - 3(x^{(1)})^4 - (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)^2}},$$

a naďalej budeme pokračovať vo výpočte a_i , $a_{i,j}$, μ_i a $\mu_{i,j}$.

3.1.2 Výpočet a_i a $a_{i,j}$

Teraz odvodíme hodnoty a_i a $a_{i,j}$.

Z (2.8) vieme, že pre a_i platí:

$$a_i = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\right)g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})},$$

a teda

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-2(x^{(1)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ a_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ a_3 &= 0, \\ a_4 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Výpočet $a_{i,j}$ je naďalej popísaný nižšie:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) \frac{\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x}) [g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})]}{h^2(\mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \frac{U_1 - U_2}{h^4(\boldsymbol{\mu})},
\end{aligned}$$

kde U_1 je:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} h(\mathbf{x}) [g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})] + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x}) \right] \right\} h^2(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} [g(\boldsymbol{\mu}) - g(\boldsymbol{\mu})] + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right] \right\} h^2(\boldsymbol{\mu}) \\
&= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right\} h^2(\boldsymbol{\mu}),
\end{aligned}$$

a U_2 je:

$$\begin{aligned}
U_2 &= \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x}) [g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})] \right] 2h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x}) \right\} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} [g(\boldsymbol{\mu}) - g(\boldsymbol{\mu})] \right] 2h(\boldsymbol{\mu}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h^2(\boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}$$

Takže:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \frac{1}{h^2(\boldsymbol{\mu})} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right] \\
&= \frac{1}{8} \left[2\sqrt{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pre výpočet $a_{i,j}$ vidíme, že budeme potrebovať prvé a druhé parciálne derivácie $g(\mathbf{x})$ a prvé parciálne derivácie $h(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

Hodnoty 1. derivácie $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= -2(x^{(i)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = -2, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}}g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(4)}}g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= 0.\end{aligned}$$

Tabuľka s druhými deriváciami funkcie $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$:

$\frac{\partial^2}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}g(\mathbf{x}) _{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$	-2	0	0	0
$j = 2$	0	0	0	0
$j = 3$	0	0	0	0
$j = 4$	0	0	0	0

Tabuľka 3.1: Tabuľka 2. derivácií $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

Hodnoty 1. derivácie $h(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(-4x^{(3)} + 16x^{(1)}x^{(2)} - 16(x^{(1)})^3)|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = -\sqrt{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(8(x^{(1)})^2 - 2x^{(2)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}}h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(-4x^{(1)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(4)}}h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(1)|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Tým pádom jednotlivé hodnoty a_{ij} sú v tabuľke nižšie:

a_{ij}	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\frac{1}{32}\sqrt{2}$
$j = 2$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{64}\sqrt{2}$
$j = 3$	$-\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}$	0	0
$j = 4$	$\frac{1}{32}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{64}\sqrt{2}$	0	0

Tabuľka 3.2: Tabuľka hodnôt $a_{i,j}$.

Tým sme odvodili hodnoty pre a_i a $a_{i,j}$.

3.1.3 Výpočet μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1, i_2, i_3}

Nadalej pre výpočet $p_1(x)$ potrebujeme aj hodnoty μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1, i_2, i_3} z (2.9). Pre sprehľadnenie zápisu označíme \mathbf{X} ako náhodný vektor s rovnakým rozdelením ako \mathbf{X}_i , pre ľubovoľné $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\mu_{i_1, i_2} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_2)}],$$

a

$$\mu_{i_1, i_2, i_3} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_2)}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_3)}].$$

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené hodnoty μ_{i_1, i_2} pre $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

μ_{i_1, i_2}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$	$i_1 = 3$	$i_1 = 4$
$i_2 = 1$	1	4	18	96
$i_2 = 2$	4	20	108	672
$i_2 = 3$	18	108	684	4896
$i_2 = 4$	96	672	4896	39744

Tabuľka 3.3: Tabuľka hodnôt μ_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Môžeme si všimnúť, že tabuľky 3.1, 3.2 a 3.3 sú symetrické.

Zo vzorcov (2.15) je možné vidieť, že nepotrebujeme všetky hodnoty v tabuľke 3.2, keďže všetky členy pri μ_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{3, 4\}$ sú nulové, ale keďže sa jednalo o 4 hodnoty tak sme ich doplnili pre demonštráciu výpočtu μ_{i_1, i_2} .

Pre hodnoty μ_{i_1, i_2, i_3} , pre $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ sa môžeme pozrieť na vzorec pre výpočet A_3 z (2.15) a keďže vidíme, že μ_{i_1, i_2, i_3} za nachádza v sume pri člene $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ a nadalej z vzorcov (3.2) vidíme, že člen $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ bude nenulový len pre hodnoty $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$. A z toho dôvodu nám stačí len dopočítavať hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} , kde $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$.

Hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} sú v nasledujúcich tabuľkách

μ_{i_1, i_2, i_3}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	2	12
$i_2 = 2$	12	80

Tabuľka 3.4: Hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} pre $i_3 = 1$

μ_{i_1, i_2, i_3}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	12	80
$i_2 = 2$	80	592

Tabuľka 3.5: Hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} pre $i_3 = 2$

Tým sme vypočítali μ_{i_1, i_2, i_3} a μ_{i_1, i_2} potrebné pre výpočet p_1 .

3.1.4 Výpočet p_1

Vypočítame p_1 za pomoci vzorcov (2.17) a (2.15).

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=1}^4 a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} = -\frac{15}{4} \sqrt{2}, \\ \sigma^2 &= \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=1}^4 a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2} = 1, \\ A_3 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + 3 \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \\ &= \frac{15}{2} \sqrt{2} + 3 \left(-\frac{29}{4} \sqrt{2} \right) = -\frac{57}{4} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Môžeme vidieť, že $\sigma^2 = 1$, čo je dané tým, že máme $A(\mathbf{x})$ už normalizované. Takže z (2.17) vyplýva, že:

$$p_1(x) = -A_1 \sigma^{-1} - \frac{1}{6} A_3 \sigma^{-3} (x^2 - 1) = \frac{15}{4} \sqrt{2} + \left(\frac{19}{8} \sqrt{2} \right) (x^2 - 1). \quad (3.4)$$

3.1.5 Vyjadrenie Edgeworthsovo rozvoja

Na základe predošlých výpočtov môžeme rozdelenie odhadu rozptylu súčtu exponenciálneho rozdelenia za pomoci $\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2$ aproximovať pomocou Edgeworthsovo rozvoja a to pravdepodobnosť:

$$P\left(n^{1/2} \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - 1}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}} \leq x\right),$$

aproximujeme pomocou:

$$\Phi(x) + n^{-1/2} \left[\frac{15}{4} \sqrt{2} + \left(\frac{19}{8} \sqrt{2} \right) (x^2 - 1) \right] \phi(x). \quad (3.5)$$

s chybou $o(n^{-1/2})$.

Videli sme, že výpočet $p_1(x)$ nie je závislý na n a teda vzorec platí pre ľubovoľné n , ale vo výpočte sa využíval fakt že sme poznali momenty exponenciálneho rozdelenia a teda tento vzorec platí pre odhad rozdelenia štandardizovaného výverového rozptylu exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou 1, pre strednú hodnotu λ tento vzorec platí pre aproximáciu výrazu:

$$P\left(n^{1/2} \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - \lambda^2}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}} \leq x\right).$$

Pre náš prípad, rozdelenia odhad rozptylu 3 exponenciálnych veličín, stačí zvoliť $n = 3$.

3.1.6 Cornish-Fisherov rozvoj

Pre výpočet jednotlivých kvantilov môžeme použiť Cornish-Fisherov rozvoj za pomoci (2.23) a (3.4). Z toho vyplýva, že

$$w_\alpha = u_\alpha + n^{-1/2} \left[-\frac{15}{4}\sqrt{2} - \left(\frac{19}{8}\sqrt{2}\right)(u_\alpha^2 - 1) \right] + o(n^{-1/2}),$$

kde w_α je α -kvantil veličiny $n^{-1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n)$, zavedenej v kapitole 3 časti 3.1.1 Zavedenie odhadu, a u_α je α -kvantil štandardného normálneho rozdelenia.

3.1.7 Porovnanie s Monte Carlom

V tejto kapitole porovnáme Edgeworthsov rozvoj (3.5) s aproximáciou pomocou metódy Monte Carla a normálnym rozdelením. Označme:

$$F_{edge}(x) = \Phi(x) + n^{-1/2} \left[\frac{15}{4}\sqrt{2} + \left(\frac{19}{8}\sqrt{2}\right)(x^2 - 1) \right] \phi(x),$$

a

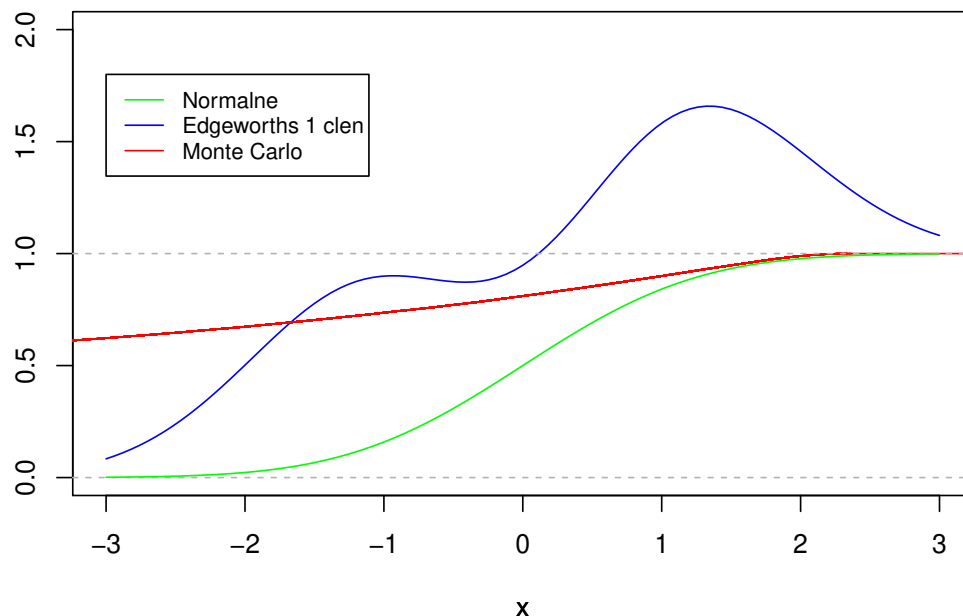
$$F_{norm}(x) = \Phi(x),$$

a

$$F_{MC}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I} \left\{ n^{1/2} \frac{(\bar{W}_{n,j}^2 - (\bar{W}_{n,j})^2) - 1}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_{i,j} - \bar{W}_{i,j})^4 - (\bar{W}_{n,j}^2 - (\bar{W}_{n,j})^2)^2}} \leq x \right\},$$

kde N je počet generovaní a j je j -ta generácia n -tíc W_i z exponenciálneho rozdelenia.

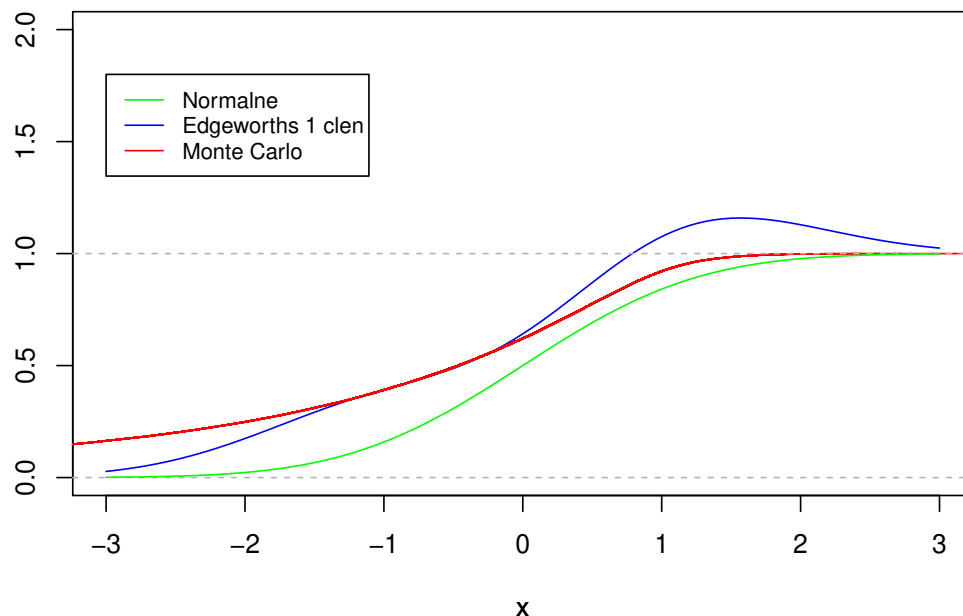
Grafické porovnanie jednotlivých rozdelení pre $n = 3$ a $N = 100\,000$ je na grafe nižšie.



Obrázek 3.1: Jednotlivé aproximácie.

Z obrázku 3.1 je vidieť, že distribučná funkcia normálneho rozdelenia a ani Edgeworthsov rozvoj s jedným členom, nepopisujú dostatočne dobre rozdelenie. Navyše Edgeworthsov rozvoj sa dostal nad hodnotu 1 čo je dané chybou rozvoja je chyba $o(n^{-1/2})$. Tým pádom je pre túto situáciu ($n = 3$) Edgeworthsov rozvoj nepoužiteľný (oproti príkladu z kapitoly 1). Ale ak by sme zobrali n väčšie tak budeme môcť vidieť, že Edgeworthsov rozvoj sa začne blížiť k požadovanému rozdeleniu.

Grafické porovnanie jednotlivých rozdelení pre $n = 30$ a $N = 100\,000$ je na grafe nižšie.



Obrázek 3.2: Jednotlivé aproximácie.

Z obrázku 3.2 je vidieť, že pre $n = 30$ Edgeworthsov rozvoj lepšie aproximuje rozdelenie než tomu bolo pri rozdelení s $n = 3$.

Nadalej porovnáme rozdelenie s jedným členom Edgeworthsovho rozvoju a bez neho na základe veličiny K .

$$K_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{MC}(x) - F_n(x)|,$$

kde za $F_n(x)$ budeme uvažovať $F_{edge}(x)$ alebo $F_{norm}(x)$.

Pre jednotlivé n sú zhodnotené informácie v nasledujúcej tabuľke:

Aproximácia / hodnota K_n	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Normálna aproximácia	≈ 0.651	≈ 0.245	≈ 0.139	≈ 0.045
Edgeworthsov rozvoj s 1 členom	≈ 0.580	≈ 0.137	≈ 0.052	≈ 0.011

Tabuľka 3.6: Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.

Z tabuľky 3.6 môžeme vidieť, že na základe K_n je Edgeworthsov rozvoj je bližšie k numerickej aproximácii než aproximácia normálnym rozdelením.

3.1.8 Porovnanie kvantilov

V tejto časti môžeme porovnať jednotlivé kvantily pre rôzne n a α , a pevné $N = 100\,000$ pre Monte Carlo.

Kvantily pre $\alpha = 0.01$ a ($u_{0.01} = -2.32$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	≈ -13.943	≈ -6.000	≈ -4.338	≈ -2.962
Monte Carlo	≈ -1225.810	≈ -11.368	≈ -5.582	≈ -3.098

Tabulka 3.7: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.01$.

Kvantily pre $\alpha = 0.05$ a ($u_{0.05} = -1.65$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	≈ -8.014	≈ -3.658	≈ -2.748	≈ -1.993
Monte Carlo	≈ -205.158	≈ -6.150	≈ -3.383	≈ -2.076

Tabulka 3.8: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.05$.

Kvantily pre $\alpha = 0.95$ a ($u_{0.95} = 1.65$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	≈ -4.724	≈ -0.369	≈ 0.541	≈ 1.295
Monte Carlo	≈ 1.521	≈ 1.146	≈ 1.222	≈ 1.411

Tabulka 3.9: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.95$.

Kvantily pre $\alpha = 0.99$ a ($u_{0.99} = 2.32$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	≈ -9.290	≈ -1.347	≈ 0.314	≈ 1.690
Monte Carlo	≈ 2.012	≈ 1.607	≈ 1.666	≈ 1.923

Tabulka 3.10: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.99$.

Z tabuliek 3.9 a 3.10 vidíme, že pre $n \in \{3, 30, 100\}$ Cornish Fisherova aproximácia kvantilu pre $\alpha = 0.95$ je väčšia než pre $\alpha = 0.99$, tento problém vzniká vďaka tomu, že aproximujeme jednotlivé kvantily polynómicou funkciou kvantilu štandardného normálneho rozdelenia, a teda môže sa stať, že kvantil pre väčšiu hodnotu α bude menší než kvantil pre hodnotu α menšiu.

3.2 Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového priemeru.

V tejto časti sa pokúsime aproximovať rozdelenie t -štatistiky a rozdelenie štandardizovaného výberového priemeru rovnako rozdelených nezávislých veličín, a porovnáme túto aproximáciu s aproximáciou normálnym rozdelením a Študentovým t -rozdelením.

3.2.1 Zavedenie pojmu t -štatistika

Na začiatok si zavedieme t -štatistiku, pre jednoduchšie porovnanie neskôr s Edgeworthovým rozvojom, budeme označovať náhodné veličiny W_i miesto častejšieho označenia X_i .

Nech W_1, \dots, W_n sú nezávislé náhodné veličiny so strednou hodnotou μ a konečným rozptylom σ^2 . Potom nech

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i, \text{ a } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^2,$$

potom

$$T_n = n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mu}{S_n}.$$

T_n budeme nazývať t -štatistika a ak W_i pochádza z normálneho rozdelenia tak má T_n má Študentovo t -rozdelenie s $n-1$ stupňami voľnosti (Anděl (2007, str. 73)). A pre W_1, \dots, W_n z rozdelenia s konečným rozptylom, platí:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0,1).$$

Nadalej budeme odvodzovať Edgeworthsov rozvoj pre výberový priemer nezávislých veličín.

3.2.2 Edgeworthsov rozvoj pre štandardizovaný výberový priemer nezávislých rovnako rozdelených veličín

Nech máme náhodný výber W_1, \dots, W_n a chceli by sme aproximovať jeho výberový priemer pomocou, pomocou Edgeworthsovho rozvoju, potom podľa príkladu hladkých transformácií v kapitole 2 označme $\mathbf{X}_i = \{W_i, W_i^2\}^T$, $\boldsymbol{\mu} = \{E[W_i], E[W_i^2]\}^T$,

$$g(\mathbf{x}) = x^{(1)}, \text{ a } h(\mathbf{x}) = x^{(2)} - (x^{(1)})^2.$$

Potom:

$$n^{1/2} A(\mathbf{x}) = n^{1/2} \frac{g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})}{h(\mathbf{x})},$$

a

$$n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n) = n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mu^{(1)}}{\sqrt{\bar{W}_n^2 - \bar{W}_n^2}}.$$

Čo môžeme prepísať do tvaru:

$$n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mu^{(1)}}{S_n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} T_n.$$

Takže ak by sme pomocou Edgeworthsovho rozvoja aproximovali t -štatistiku tak dostávame:

$$P\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - E(W_i)}{S_n} \leq x\right) = P\left(T_n \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} x\right).$$

3.2.3 Predpoklady pre Edgeworthsov rozvoj

Pokiaľ chceme použiť Edgeworthsov rozvoj s jedným členom rozdelenie náhodného vektoru \mathbf{X}_j musí, podľa vety 1 z kapitoly 2, splňovať $E(\|\mathbf{X}_j\|^3) < \infty$ a

$$\limsup_{\|t\| \rightarrow \infty} |E \exp(i\langle \mathbf{X}_j, t \rangle)| < 1.$$

2. podmienka je splnená ak \mathbf{X}_j pochádza z rozdelenia s nedegenerovanou absolútne spojitou komponentou, viz. Hall (1992, str. 65-67).

3.2.4 Výpočet prvého člena Edgeworthsovho rozvoja

Teraz budeme pokračovať pomocou pre výpočet $p_1(x)$ a vzorcov (2.15):

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2}, \\ \sigma^2 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2}, \\ A_3 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + 3 \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4}, \end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned} a_{i_1} &= \frac{\partial}{\partial x^{(i_1)}} A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}, \\ a_{i_1, i_2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^{(i_1)} \partial x^{(i_2)}} A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}, \\ \mu_{i_1, i_2} &= E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_2)}], \\ \mu_{i_1, i_2, i_3} &= E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_2)} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_3)}], \end{aligned}$$

kde \mathbf{X} je náhodný vektor s rovnakým rozdelením ako \mathbf{X}_i , pre ľubovoľné $i \in \{1, \dots, n\}$

3.2.5 Výpočet a_{i_1} a a_{i_1, i_2}

výpočet a_{i_1} :

$$a_{i_1} = \frac{\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})}$$

Nadalej:

$$\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = 1$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x^{(2)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = 0$$

z čoho vyplýva že:

$$a_1 = \frac{1}{h(\boldsymbol{\mu})}, \text{ a } a_2 = 0.$$

Z predchádzajúceho príkladu a vzorca 3.3 vieme, že

$$a_{i,j} = \frac{1}{h^2(\boldsymbol{\mu})} \left[h(\boldsymbol{\mu}) \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right].$$

V tomto prípade všetky 2. parciálne derivácie $g(\mathbf{x})$ sú nulové, takže budeme pokračovať hodnotami pre $\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\boldsymbol{\mu})} (-2x^{(1)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = -\frac{\mu^{(1)}}{h(\boldsymbol{\mu})}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\boldsymbol{\mu})} = \frac{1}{2h(\boldsymbol{\mu})}, \end{aligned}$$

Teraz môžeme spočítať hodnoty pre a_{i_1, i_2} :

a_{i_1, i_2}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	$\frac{2 \mathbb{E}(W_i)}{h^3(\boldsymbol{\mu})}$	$-\frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})}$
$i_2 = 2$	$-\frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})}$	0

Tabulka 3.11: Tabuľka hodnôt a_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{1, 2\}$.

Tým sme spočítali hodnoty a_{i_1} a a_{i_1, i_2} , kde vieme že $h^2(\boldsymbol{\mu}) = \text{var}(W_i)$.

3.2.6 Výpočet μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1, i_2, i_3}

V nasledujúcej tabuľke sú zhrnuté hodnoty pre μ_{i_1, i_2}

μ_{i_1, i_2}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	$\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2$	$\mathbb{E}(W_i^3) - \mathbb{E}(W_i^2) \mathbb{E}(W_i)$
$i_2 = 2$	$\mathbb{E}(W_i^3) - \mathbb{E}(W_i^2) \mathbb{E}(W_i)$	$\mathbb{E}(W_i^4) - (\mathbb{E}(W_i^2))^2$

Tabulka 3.12: Tabuľka hodnôt μ_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{1, 2\}$.

Pre výpočet μ_{i_1, i_2, i_3} sa pozrieme na výraz A_3 zo vzorcov (2.15), kde vidíme vzhľadom na to že $a_2 = 0$, že jediná potrebná hodnota je hodnota $\mu_{1,1,1}$.

$$\mu_{1,1,1} = E(W_i^3) - 3E(W_i^2)(E(W_i))^2 + 2(E(W_i))^3.$$

3.2.7 Vyjadrenie p_1 a Edgeworthsova aproximácia

Momentálne dosadíme hodnoty do vzorcov pre A_1, σ^2, A_2 .

Výpočet pre A_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2E(W_i)}{h^3(\boldsymbol{\mu})} (E(W_i^2) - (E(W_i))^2) - 2 \frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})} (E(W_i^3) - E(W_i^2)E(W_i)) \right] \\ &= -\frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})} \left[E(W_i^3) - 3E(W_i^2)(E(W_i))^2 + 2(E(W_i))^3 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{E(W_i - E(W_i))^3}{(E(W_i^2) - (E(W_i))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Výpočet pre σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\mu_{1,1}}{h^2(\boldsymbol{\mu})} = 1.$$

Výpočet pre A_3 :

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\mu_{1,1,1}}{h^3(\boldsymbol{\mu})} + 3 \left[\frac{\mu_{1,1}}{h^2(\boldsymbol{\mu})} \right] \left[\sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} \right] \\ &= \frac{E(W_i - E(W_i))^3}{(E(W_i^2) - (E(W_i))^2)^{3/2}} + 3(2A_1) \\ &= \frac{E(W_i - E(W_i))^3}{(E(W_i^2) - (E(W_i))^2)^{3/2}} - 3 \frac{E(W_i - E(W_i))^3}{(E(W_i^2) - (E(W_i))^2)^{3/2}} \\ &= -2 \frac{E(W_i - E(W_i))^3}{(E(W_i^2) - (E(W_i))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Nadalej si označme:

$$\gamma = \frac{E(W_i - E(W_i))^3}{(E(W_i^2) - (E(W_i))^2)^{3/2}}.$$

Poznámka: γ sa nazýva šikmosť veličiny W_i , a pokiaľ W_i pochádza z rozdelenia zo symetrického rozdelenia, tak $\gamma = 0$.

Potom prvý člen Edgeworthsovo rozvoja je v tvare

$$p_1(x) = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\gamma(x^2 - 1) = \frac{1}{6}\gamma(2x^2 + 1).$$

A teda pravdepodobnosť

$$P\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}T_n \leq x\right),$$

aproximujeme pomocou výrazu

$$\Phi(x) + \frac{1}{6}n^{-1/2}\gamma(2x^2 + 1)\phi(x).$$

Tým pádom pre pravdepodobnosť T_n

$$P\left(T_n \leq y\right),$$

môžeme aproximovať pomocou:

$$\Phi\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}y\right) + \frac{1}{6}n^{-1/2}\gamma\left(2\frac{n-1}{n}y^2 + 1\right)\phi\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}y\right). \quad (3.6)$$

Zo vzorca (3.6) môžeme vidieť, že pokiaľ W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia, tak

$$P\left(T_n \leq y\right) = \Phi\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}y\right) + o(n^{-1/2})$$

Tým sme ukázali Edgeworhtsov rozvoj s jedným členom pre výberový priemer, následne sme ukázali Edgeworthsov rozvoj pre T_n a ako sa mení tento rozvoj ak W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia.

3.2.8 Aproximácia kvantilov výberového priemeru založená na Cornish-Fisherovej aproximácii

Pre aproximáciu kvantilov náhodnej veličiny $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}n^{1/2}\frac{\bar{W}_n - E(W_i)}{S_n}$ použijeme (2.23) Cornish-Fisherov rozvoj.

$$w_\alpha = u_\alpha - \frac{1}{6}n^{-1/2}\gamma(2u_\alpha^2 + 1)$$

A keďže pre aproximáciu platí, že:

$$P\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}T_n \leq w_\alpha + o(n^{-1/2})\right) = \alpha$$

Potom aproximácia kvantilu pomocou Cornish-Fisherovej aproximácie pre T_n je $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}w_\alpha$. Naďalej ak W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia, tak $w_\alpha = u_\alpha$, a následne kvantily T_n pre W_i zo symetrického rozdelenia budú v tvare $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}u_\alpha$.

Tým sme skončili odvodzovanie Edgeworthsovho rozvoja rozdelenia výberového priemeru a jeho porovnanie s t -štatistikou, kde sme prišli na to, že celý polynóm p_1 je nulový ak W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia.

Záver

V tejto práci som sa venoval Edgeworthsovmu rozvoju, jeho odvodeniu a jeho následné použitie na príkladoch. V rámci tejto práce sme zaviedli pojem hladkej transformácie náhodného vektoru a následne sme ukázali Edgeworthsov rozvoj, ktorý slúži pre aproximáciu distribučnej funkcie.

Edgeworthsov rozvoj je v tvare súčtu distribučnej funkcie normálneho rozdelenia a sumy, kde jednotlivé členy sú v tvare súčinu rozsahu výberu na danú mocninu, polynómu, ktorý nezávisí na rozsahu výberu, a hustoty normálneho rozdelenia. Práve kvôli tomuto tvaru musíme brať do úvahy, že aproximácia distribučnej funkcie pomocou Edgeworthsovho rozvoja nemusí spĺňať vlastnosti distribučnej funkcie a to vlastnosť, že distribučná funkcia je neklesajúca, a tiež vlastnosť, že distribučná funkcia je obmedzená zdola 0 a zhora 1. (Ako bolo ukázane na príkladoch.)

Nadalej sme na príkladoch porovnali použitie Edgeworthsovej aproximácie s aproximáciou pomocou normálneho rozdelenia. V príkladoch sme porovnávali pomocou grafov jednotlivých aproximácií a pomocou suprema z absolútnej hodnoty rozdielu distribučnej funkcie pravého rozdelenia, alebo jej numerickej aproximácie, a aproximácie normálnym rozdelením alebo Edgeworthsovým rozvojom. V našich príkladoch Edgeworthsov rozvoj obstál lepšie než aproximácia pomocou normálneho rozdelenia v zmysle, že bola podľa suprema rozdielu distribučných funkcií bližšie k reálnemu rozdeleniu alebo jeho numerickej aproximácie.

V práci sme ešte zaviedli pojem Cornish-Fisherovej aproximácie kvantilov a ukázali sme ich odvodenie pomocou Edgeworthsovej aproximácie. Pretože táto aproximácia kvantilov je založená na Edgeworthsovom rozvoji, tak i táto aproximácia má problémy typu: Ak $\alpha_1 < \alpha_2$, tak kvantil pre α_2 môže mať menšiu hodnotu, než kvantil pre α_1 .

Polynómy Edgeworthsovho vďaka tomu, že nezávisia na rozsahu výberu, sa dajú odvodiť a následne opakovane použiť pre rôzne rozsahy výberov, a pri niektorých transformáciách aj pre rôzne hodnoty parametrov pôvodného rozdelenia.

Pre budúce pokračovanie tejto práce, by sa dalo Edgeworthsovmu rozvoju venovať v rámci odhadu momentov alebo kumulantov a následného dosadenia do výpočtu polynómov pre Edgeworthsov rozvoj, keďže v tejto práci sa predpokladá jasne známe rozdelenie a s tým i jasne dané kumulanty a momenty. Obvykle v reálnych situáciách pri odhade parametrov a následných testov hypotéz, nie je rozdelenie známe, a teda ak by sa mal Edgeworthsov rozvoj použiť v nejakej z týchto situácií, bolo by vhodné uvažovať nie pravé hodnoty momentov a kumulantov ale ich odhady, a následne aké to bude mať dopady na presnosť Edgeworthsovho rozvoja.

4. Apendix

4.1 Charakteristická funkcia a jej vlastnosti

Definice 2 (Lachout, 2004, str. 60). *Pre komplexnú náhodnú veličinu X definovanú na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) definujeme jej moment ako číslo $E X = E \operatorname{Re} X + i E \operatorname{Im} X$ pokiaľ integrál existuje.*

Značenie:

Pre reálne vektory $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$ budeme označovať skalárny súčin týchto dvoch vektorov ako $\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle$.

Definice 3 (Lachout, 2004, str. 60). *Pre reálny náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ definujeme komplexnú funkciu*

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E \exp(i \langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k,$$

a budeme ju nazývať charakteristickou funkciou náhodného vektoru.

Věta 3 (Lachout, 2004, str. 63). *Nech náhodná veličina $X \in L_p$ pre nejaké $p \in \mathbb{N}$.*

- Potom ψ_X má všade na \mathbb{R} spojitú obmedzenú deriváciu do rádu p (vrátane p) a platí.*

$$\psi_X^{(k)}(t) = i^k E [X^k e^{itX}] \text{ pre každé } k = 1, 2, \dots, p, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Špeciálne pre } \psi_X^{(k)}(0) = i^k E [X^k] \text{ pre } k = 1, 2, \dots, p.$$

- Existuje Taylorov rozvoj*

$$\psi_X(t+s) = \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} \psi_X^{(k)}(s) + \frac{t^p}{p!} \rho_p(t, s) \text{ pre každé } s, t \in \mathbb{R} \text{ kde}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{s \in \mathbb{R}} |\rho_p(t, s)| = 0, |\rho_p(t, s)| \leq \sqrt{8} E |X|^p,$$

špeciálne

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^p \frac{it^k}{k!} E X^k + \frac{t^p}{p!} \rho_p(t, 0) \text{ pre každé } t \in \mathbb{R}.$$

Věta 4 (Lachout, 2004, str. 65). *Nech náhodná veličina $X \in L_p$ pre každé $p \in \mathbb{N}$ a mocnina rada $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E X^k}{k!} t^k$ má kladný polomer konvergenzie $R > 0$. Potom rozdelenie X je určené jednoznačne momentami a platí:*

$$\psi_X(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \psi_X^{(k)}(s) \text{ pre každé } s, t \in \mathbb{R}, |t| < R,$$

špeciálne

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E X^k \text{ pre každé } |t| < R.$$

Věta 5 (Lachout, 2004, str. 67). *Pre reálne náhodné vektory*

$\mathbf{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)})^T, n \in \mathbb{N}$ *a vektor náhodný* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ *platí:*

$$X^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} X \Leftrightarrow \psi_{\mathbf{X}^{(n)}}(\mathbf{t}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \text{ pre každé } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k.$$

4.2 Definícia O_p, o_p

Definice 4 (Lachout, 2004, str. 24). *Nech $a_n, n \in \mathbb{N}$ je postupnosť čísel a $X_n, n \in \mathbb{N}$ je postupnosť reálnych náhodných veličín potom:*

- *Hovoríme, že $X_n = o_p(a_n)$ ak platí pre každé $\varepsilon > 0$ je*
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| > \varepsilon a_n) = 0.$
- *Hovoríme, že $X_n = O_p(a_n)$ ak platí pre každé*
 $\lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n| > K a_n) = 0.$

4.3 Delta veta

Věta 6 (DasGupta, 2008, str. 41). *Nech $\{\mathbf{T}_n\}$ je postupnosť k -dimenzionálnych náhodných vektorov taká že:*

$$n^{1/2}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_k(\mathbf{0}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})).$$

A nech $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je derivovateľná v bode $\boldsymbol{\theta}$ s Jakobiho maticou $\nabla g(\boldsymbol{\theta})$. Potom:

$$n^{1/2}(g(\mathbf{T}_n) - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_m(\mathbf{0}, \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \nabla g(\boldsymbol{\theta})).$$

4.4 Centrálna limitná veta

Věta 7 (Lachout, 2004, str. 81). *Pre nezávislé rovnako rozdelené q -rozmerné reálne náhodné vektory $\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N}$ a $E[\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n] < +\infty$, platí:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j - n E \mathbf{X}_1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \sim N_q(\mathbf{0}, \text{Var} \mathbf{X}_1).$$

Seznam použité literatury

- ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Druhé vydání. MatfyzPress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.
- CRAMÉR, H. (1928). On the composition of elementary errors. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1928**(1), 13–74. doi: 10.1080/03461238.1928.10416862.
- DASGUPTA, A. (2008). *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*. I. Springer-Verlag New York, New York. ISBN 978-0-387-75971-5.
- DOVGOSHEY, O., MARTIO, O., RYAZANOV, V. a VUORINEN, M. (2006). The cantor function. *Expositiones Mathematicae*, **24**(1), 1 – 37. ISSN 0723-0869. doi: <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2005.05.002>.
- HALL, P. (1992). *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. II. Springer-Verlag New York, New York. ISBN 978-1-4612-4384-7.
- JARNÍK, V. (1984). *Diferenciální počet II*. Štvrté vydanie. Academia, Praha.
- LACHOUT, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti*. Druhé vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.

Seznam obrázků

1.1	Porovnanie jednotlivých aproximácií so skutočným rozdelením. . .	17
1.2	Porovnanie rozdielu skutočného rozdelenia a jednotlivých aproxi- mácií	18
1.3	Edgeworthsova aproximácia o dvoch členoch.	19
1.4	Edgeworthsova aproximácia o jednom člene.	20
3.1	Jednotlivé aproximácie.	40
3.2	Jednotlivé aproximácie.	41

Seznam tabulek

1.1	Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.	18
3.1	Tabuľka 2. derivácii $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$	36
3.2	Tabuľka hodnôt $a_{i,j}$	36
3.3	Tabuľka hodnôt μ_{i_1,i_2} , pre $i_1,i_2 \in \{1,2,3,4\}$	37
3.4	Hodnoty pre μ_{i_1,i_2,i_3} pre $i_3 = 1$	37
3.5	Hodnoty pre μ_{i_1,i_2,i_3} pre $i_3 = 2$	37
3.6	Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.	41
3.7	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.01$	42
3.8	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.05$	42
3.9	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.95$	42
3.10	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.99$	42
3.11	Tabuľka hodnôt a_{i_1,i_2} , pre $i_1,i_2 \in \{1,2\}$	45
3.12	Tabuľka hodnôt μ_{i_1,i_2} , pre $i_1,i_2 \in \{1,2\}$	45

Prílohy

RCode_Priklad_kap_1.txt

RCode_Priklad_kap_2_exp.txt